Séminaire Bourbaki Mars 2001
53ème année, 2000-2001, n° 887

RÉPARTITION DES ZÉROS DES FONCTIONS L ET MATRICES ALÉATOIRES

par **Philippe MICHEL**

INTRODUCTION

La fonction ζ de Riemann est la série $\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} n^{-s} = \prod_p (1-p^{-s})^{-1}$ pour $\Re e s > 1$. Elle admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ et vérifie une équation fonctionnelle de la forme $\xi(1-s) = \xi(s)$ où $\xi(s) = s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et a tous ses zéros dans la bande critique $0 < \Re e s < 1$. Depuis 1995, le problème le plus fameux des mathématiques est sans doute de montrer l'hypothèse de Riemann qui prédit que tous les zéros de ξ sont sur la droite critique $\Re e s = 1/2$. Pour aborder cette question, une idée qui remonte à Polya et Hilbert consiste à donner une réalisation non-tautologique de l'ensemble des zéros de ξ comme spectre d'un opérateur de Hilbert possédant certaines symétries dont on déduirait l'hypothèse de Riemann (notons que cette approche fonctionne pour les fonctions L de courbes sur les corps finis et que A. Connes a donné une telle réalisation pour les zéros critiques [1] et pour généralement une condition équivalente à la validité de l'Hypothèse de Riemann Généralisée aux fonctions L de Caractères de Hecke [Co]). Dans les années 1970, Montgomery [Mo] montre une coincidence troublante entre les valeurs propres de matrices aléatoires de grand rang et les zéros de ξ, ce qui semble confirmer leur nature spectrale. Pour énoncer son résultat on note $\{\rho_n := 1/2 + i\gamma_n\}_{n\in\mathbb{Z}-\{0\}}$ la suite des zéros de ξ comptés avec leur multiplicité : ceux-ci sont indexés de sorte que $\rho_{-n} = \overline{\rho_n}$ et que la suite $\{\Im m \rho_n\}_{n\in\mathbb{Z}-\{0\}}$ soit une suite croissante. Pour $T > 0$, on note $N(T) = |\{\rho_i,\ 0 < |\gamma_i| \leq T\}|$ le nombre de zéros de hauteur inférieure à T. On a $N(T) = \frac{T}{2\pi}\log T(1+o(1))$, de sorte que si l'on normalise γ_i en posant $\hat{\gamma}_i = \frac{\gamma_i \log|\gamma_i|}{2\pi}$, l'espacement moyen $\hat{\delta}_i := \Re e(\hat{\gamma}_{i+1} - \hat{\gamma}_i)$ vaut 1. Montgomery montre alors le

Théorème 0.1 (Montgomery). — *Sous l'hypothèse de Riemann ($\gamma_i \in \mathbb{R}$), pour toute fonction ϕ lisse sur $\mathbb{R}$ dont la transformée de Fourier est à support compact dans* $]-1,1[$

[1] Ceux situés sur l'axe critique $\Re e s = 1/2$

on a

$$(1) \qquad \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{1\leq i\neq j\leq N} \phi(\hat{\gamma}_i - \hat{\gamma}_j) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) r_2(GUE)(x) dx$$

avec $r_2(GUE, x) = 1 - (\frac{\sin \pi x}{\pi x})^2$.

Dyson a remarqué que la densité $r_2(GUE)(x)$ coincide avec la densité limite de la distribution de corrélation normalisée des paires de valeurs propres de matrices aléatoires hermitiennes de rang N (relativement à une certaine mesure gaussienne) pour $N \to +\infty$: la famille de ces espaces ainsi probabilisés est appelée l'ensemble "GUE" [2] (voir ci-dessous pour des définitions plus précises). Montgomery a aussi conjecturé que l'égalité (1) est valable sans restriction sur le support de $\hat{\phi}$; cette conjecture a des conséquence mirifiques sur des questions fines concernant la distribution des nombres premiers (ce qui n'est guère surprenant) mais aussi sur des fonctions L autres que ζ (ainsi elle implique qu'il n'y a pas de zéro de Siegel pour les fonctions L de caractères de Dirichlet quadratiques). En 1995, Rudnick et Sarnak [RS] ont montré que cette coincidence n'est pas fortuite en généralisant l'énoncé précédent aux zéros de fonctions L de formes automorphes cuspidales sur $GL_d(\mathbb{Q})$, (cette fois sous l'Hypothèse de Riemann Généralisée et avec le même type de restrictions sur la fonction test ϕ). Plus généralement, ils montrent que la distribution de corrélation des k-uples de ces zéros coincide avec celle des k-uples de valeurs propres de matrices aléatoires de l'ensemble GUE (au moins pour une certaine classe de fonctions tests). Ainsi ils conjecturent que la distribution locale des *écarts* entre les zéros de toute fonction L de forme automorphe cuspidale est régie par une loi universelle provenant des matrices aléatoires (ce que nous appellerons la *Conjecture GUE*). Il va sans dire qu'on est extrêmement loin de prouver cette conjecture qui déborde largement du cadre de l'hypothèse de Riemann ; mais au moins elle est confortée par des résultats expérimentaux, fruits des calculs numériques intensifs sur les zéros de ζ où de ceux d'autres fonctions L [Od, Ru].

La question de la distribution locale des zéros eux mêmes se pose alors naturellement. Des travaux ultérieurs de Katz et Sarnak [KSa] montrent que la situation est encore plus riche ; en étudiant la distribution des zéros de familles de fonctions L sur les corps finis (pour ces fonctions on dispose de l'analogue de l'Hypothèse de Riemann [De2]), ils montrent d'une part que la conjecture GUE est vraie dans ce contexte, mais aussi en testant des statistiques liées à la distribution des zéros (et non à leurs écarts), que des lois différentes (de celle provenant de GUE) apparaissent. Ces lois qui correspondent à celles des valeurs propres de matrices aléatoires appartenant à des groupes compacts classiques (unitaires, symplectiques, ou orthogonaux), s'expliquent naturellement en terme du groupe de monodromie géométrique attaché à chaque famille.

[2] pour "Gaussian Unitary Ensemble"

Reste le cas beaucoup plus mystérieux des familles de fonctions L sur les corps de fonctions. Dans l'article [ILS], Iwaniec , Luo et Sarnak étudient la repartition des zéros au voisinage du point critique pour des familles de fonctions L liées aux formes modulaires holomorphes paramétrées par leur poids ou leur niveau, et montrent que ceux-ci sont distribués suivant une loi qui dépend de chaque famille mais qui provient encore d'un des groupes compacts de matrices aléatoires rencontré pour les corps finis. Cette fois on ne dispose pas encore d'une interprétation permettant de d'expliquer *a priori* pourquoi telle loi est associée à telle famille et on se borne plutôt à des constatations. À leur suite d'autres familles de fonctions L ont été explorées et l'on n'a toujours pas pu exhiber de loi de distribution différente des quatres rencontrées précédemment.

C'est l'ensemble de ces constatations que nous allons exposer. Il peut sembler étonnant de consacrer un exposé à un domaine encore très *expérimental* et où beaucoup des résultats obtenus dépendent de conjectures inaccessibles (les Hypothèses de Riemann Généralisées voire plus). Mais il faut dire que les matrices aléatoires fournissent un modèle probabiliste remarquablement cohérent pour décrire des fonctions L et leurs zéros: de nombreux phénomènes nouveaux et anciens rencontrés en théorie analytique des fonctions L ainsi que de nombreuses conjectures faites dans le passé trouvent une explication simple dans ce modèle (par exemple les résultats de Selberg sur la répartitiontion gaussienne des valeurs de $\log|\zeta(1/2+it)|/\sqrt{\log\log t}$ cf. [Ti, KSn1]); d'autre part, on n' a pas encore trouvé de fait qui le remette en cause (la question de trouver les limites du modèle motive une grande partie du travail effectué dans ce domaine). Sur le plan méthodologique le modèle met au premier plan l'étude analytique des fonctions L *en familles* plutôt qu'individuellement (rappelons que la preuve par Deligne des conjectures de Weil, il y a trente ans, utilisait déjà de façon cruciale la notion de famille de fonctions L [De1]) ; enfin il fournit pour le futur, des conjectures très fines sur les fonctions L, par exemple sur la question de leur annulation aux points critiques.

Le modèle des matrices aléatoires a suscité un certain nombre d'applications frappantes et nous terminons cette introduction par trois exemples: le premier exemple est dans l'esprit du Théorème 0.1 et est dû à Conrey et Iwaniec [CI2]

Théorème 0.2 (Conrey-Iwaniec). — *Soient* $0 < a < 5$ *et* $0 < \Delta < 1/2$. *Il existe* T_0 *(dépendant explicitement de* a *et* Δ*) tel que, pour tout* $T \geq T_0$*, il existe au moins* $T/(\log T)^a$ *paires de zéros distincts* (ρ, ρ') *vérifiant* $|\Im m(\rho)| \leq T$ *et*

$$0 < |\Im m(\rho - \rho')| \leq \Delta \frac{2\pi}{\log|\rho|}.$$

Alors, pour tout caractère quadratique χ *de conducteur* D*, la fonction* $L(s,\chi)$ *ne s'annule pas sur le segment* $[1 - 1/(\log D)^b, 1]$ *avec une constante* b *explicite qui ne dépend que de* a.

Ce théorème dit que s'il existe suffisamment de paires de zéros de ξ distincts et dont l'écart est strictement inférieur à la moitié de l'écart moyen, alors les caractères quadratiques n'ont (essentiellement) pas de zéro de Siegel. Il va sans dire que la conjecture de Montgomery sur la corrélation des paires implique que l'hypothèse principale de cet énoncé est vraie (et de loin). Notons que ce critère est analogue à un autre critère dû à Iwaniec et Sarnak [IS1]:

THÉORÈME 0.3 (Iwaniec-Sarnak). — *Supposons qu'il existe $\Delta > 1/4$ et $A \geq 0$ tel que pour tout q assez grand (dépendant explicitement de Δ et de A), la proportion des formes modulaires de poids 2 et de niveau q telles que $L(f, 1/2) \geq (\log q)^{-A}$, est supérieure à Δ. Alors, pour tout caractère primitif χ de conducteur D la fonction $L(s, \chi)$ ne s'annule pas sur le segment* $[1 - 1/(\log D)^{A+2}, 1]$.

Le deuxième exemple peut-être plus frappant encore (parce qu'il touche à l'Hypothèse de Riemann Généralisée) est le suivant : on considère l'hypothèse

HYPOTHÈSE S.—*Il existe des constantes $A \geq 0$ et $1/2 \leq \alpha < 3/4$ telles que, pour tous x, $c \geq 1$, et a entier premier avec c on a la majoration*

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv a (\mathrm{mod} c)}} e\Big(\frac{2\sqrt{p}}{c}\Big) \ll c^A x^\alpha$$

où la somme porte sur les nombres premiers et la constante impliquée est absolue.

THÉORÈME 0.4 (Iwaniec-Luo-Sarnak, [ILS]). — *Supposons l'hypothèse S vérifiée pour un certain A et une constante $1/2 \leq \alpha < 3/4$. Il existe k_0 qui dépend explicitement de α, A tel que*

- *si les zéros de toutes les fonctions $L(f, s)$ des formes modulaires holomorphes de niveau 1 et de poids $k \geq k_0$ sont situés sur l'axe réel ou sur la droite critique $\Re e s = 1/2$,*

alors ces zéros sont tous de partie réelle inférieure à

$$1 - \frac{3 - 4\alpha}{11 + 4A} < 1(!).$$

Ces trois énoncés relient entre elles des propriétés de zéros de fonction L qui sont de nature différentes: les deux premiers connectent l'existence d'un zéro de Landau-Siegel pour les fonctions des caractères quadratiques à la répartition des zéros de ζ òu à la non-annulation de fonctions L de formes modulaires au point critique. Pour le troisième énoncé, on peut montrer que l'hypothèse S peut être convertie en une conjecture sur la bonne répartition modulo 1 des parties imaginaires des zéros des fonctions L de caractères de Dirichlet (il faut noter que malheureusement l'hypothèse de Riemann pour ces fonctions L n'implique l'hypothèse S que pour $\alpha = 3/4$) or cette hypothèse implique une quasi-hypothèse de Riemann pour des fonctions L de degré 2. La condition demandée sur localisation des zéros des fonctions $L(f, s)$ des formes modulaires peut paraître très (trop ?) forte, mais les auteurs ont annoncé que cette condition peut être supprimée en remplaçant l'hypothèse S par une autre plus élaborée mais qui ne dépend encore que des fonctions L de caractères de Dirichlet.

Notre troisième exemple est du à Conrey et Soundararajan, et est complètement inconditionnel

THÉORÈME 0.5 (Conrey-Soundararajan). — *Il existe une infinité de caractères de Dirichlet quadratiques primitifs* χ *dont la fonction* L, $L(\chi, s) = \sum_n \chi(n)n^{-s}$ *ne s'annule pas sur le segment critique* $[0, 1]$. *Plus précisement si on désigne par* $\mathcal{F}_D$ *l'ensemble des caractères de Dirichlet primitifs réels de conducteur* $\leq D$, *et* $\mathcal{F}_D^*$ *ceux dont la fonction L ne s'annule pas sur* $[0, 1]$, *on a*

$$\liminf_{D \to +\infty} \frac{|\mathcal{F}_D^*|}{|\mathcal{F}_D|} \geq 0.20.$$

Il semble que ce soit la première fois qu'on montre l'existence d'une infinité de fonctions L n'ayant aucun zéro réel (en dehors des zéros triviaux). Un point remarquable de ce résultat est qu'il est inspiré directement par le modèle des matrices aléatoires : le modèle explique pourquoi la méthode utilisée avait des chances de fonctionner pour la famille des caractères quadratiques, pourquoi elle ne fonctionnera pas pour certaines familles (par exemple pour la famille des caractères complexes) et prédit à quelles autres familles leur méthode est susceptible de s'appliquer.

REMERCIEMENTS.— Au cours de la rédaction de cet exposé, j'ai bénéficié de discussions et d'explications de la part de B. Conrey, K. Soundararajan et surtout de P. Sarnak qui m'a prodigué de nombreuses références et commentaires, notamment sur ses travaux en cours. Je remercie bien amicalement toutes ces personnes ainsi que Régis de la Bretèche pour sa relecture attentive et critique du manuscrit.

1. CERTAINS ENSEMBLES DE MATRICES ALEATOIRES

La théorie des matrices aléatoires remonte aux travaux de Wigner en physique nucléaire : il suggérait de modéliser les lignes de résonnance d'un noyau lourd par les valeurs propres d'une matrice aléatoire hermitienne (ou réelle symétrique) de grand rang. C'est un domaine extrêmement développé de la physique mathématique dont une référence classique est le livre de Mehta [Me]. Rappelons les principes de base de la théorie : on se donne une suite d'espaces de matrices $G(N) \subset GL_N(\mathbb{C})$, $N \geq 1$, chacun étant muni d'une mesure de probabilité dA, et on considère une suite $A \to V_N(A)$ de variables aléatoires (qui peuvent prendre leurs valeurs dans un espace de distributions). La question principale de la théorie est l'étude du comportement limite quand $N \to +\infty$ de l'espérance $E(V_N) = \int_{G(N)} V_N(A)dA$. La motivation principale de l'introduction de ces matrices est de fournir des modèles probabilistes pour des espaces vectoriels de dimension infinie possédant certaines symmétries (et en particulier des systèmes physiques complexes). Les ensembles de matrices aléatoires considérés originellement par Wigner sont les ensemble dit GUE (resp. GOE) formés par les espaces des matrices inversibles, $N \times N$, hermitiennes (resp. symétriques réelles) munis de la mesure de probabilité Gaussienne $dA = c_N e^{-\beta N \mathrm{tr}(A^2)} dx(A)$ où $dx(A)$ désigne la mesure de Lebesgue sur l'espace vectoriel réel des matrices hermitiennes (resp. symétriques) et $\beta = 1$ (resp. 2). Incidemment on peut noter que ces espaces sont les réalisations matricielles des espaces symétriques non-compacts $GL_N(\mathbb{C})/U(N)$ (resp. $GL_N(\mathbb{R})/O(N)$) via les identifications $B \to A := B\overline{B}^t$. D'autres espaces compacts de matrices ont ensuite été introduits pour modéliser d'autres problèmes de la physique mathématique [Zi]. Ces espaces sont les réalisations matricielles des onze espaces symétriques classiques, compacts et irréductibles dans la classification de Cartan [He]. Parmi ceux-ci, les seuls espaces qui apparaissent (jusqu'à présent) dans la distribution des zéros des fonctions L sont les quatre types d'espaces compacts de type II ([He] Chap. X):

- le type unitaire $G = U$, $G(N) = U(N)$ le groupe des matrices unitaires.
- le type symplectique $G = Sp$, $G(N) = USp(2N)$ le groupe des matrices symplectiques unitaires
- le type (non-irréductible) orthogonal $G = O$, $G(N) = O(N)$ formé des matrices orthogonales qui se scinde en deux sous types correspondant aux deux composantes irréductibles de $O(N)$
  - le type orthogonal pair $G = SO^+$, $G(N) = SO(2N)$, le groupe des matrices orthogonales de rang pair.
  - le type orthogonal impair $G = SO^-$, $G(N) = SO(2N+1)$, le groupe des matrices orthogonales de rang impair (en particulier 1 est valeur propre triviale).

Chacun de ces groupes est équipé de sa mesure de Haar.

1.1. **Distributions associées aux valeurs propres**

Pour $G(N)$ l'un des groupes précédents, on associe à $A \in G(N)$ diverses statistiques portant sur ses valeurs propres. On note $\{e(\theta_1), \dots, e(\theta_N)\}$ l'ensemble des valeurs propres de A *à symmétries évidentes près* : pour $G = Sp$, SO^+, SO^-, l'ensemble des valeurs propres est de la forme

$$\{e(\theta_1), \dots, e(\theta_N), e(\theta_1 + 1/2), \dots, e(\theta_N + 1/2)\}$$

et

$$\{1, e(\theta_1), \dots, e(\theta_N), e(\theta_1 + 1/2), \dots, e(\theta_N + 1/2)\},$$

et on ordonne ces valeurs propres par leur argument :

$$0 \leq \theta_1 \leq \dots \leq \theta_N \leq 1 \text{ (ou } \leq 1/2 \text{ si } G(N) = USp(2N) \text{ ou } SO(N)).$$

On souhaite étudier la répartition des valeurs propres des matrices de $G(N)$ localement dans des intervalles de longueur $\approx 1/N$, aussi on renormalise les θ_i en posant $\hat{\theta}_i := \frac{N}{\sigma}\theta_i$ avec $\sigma = 1$ (resp. $\sigma = 1/2$) si $G(N) = U(N),\ O(N)$ (resp. $G = USp(N),\ SO(2N),\ SO(2N+1)$) (de sorte que l'écart $\hat{\theta}_{i+1} - \hat{\theta}_i$ vaut 1 en moyenne). On associe alors à chaque matrice A diverses statistiques construites à partir des $\hat{\theta}_i$, et on forme leurs espérances en moyennant sur le groupe tout entier, on construit ainsi :

- *La distribution de répartition d'ordre k* définie pour toute fonction ϕ sur $\mathbb{R}^k$ symétrique et à décroissance rapide :

$$W_k(A,\phi) := \sum_{\substack{(i_1,\dots,i_k),\ i_j \le N \\ i_j \ne i_{j'}}} \phi(\hat{\theta}_{i_1},\dots,\hat{\theta}_{i_k}),\ \textit{et}\ W_k(G(N),\phi) := \int_{G(N)} W_k(A,\phi)dA \tag{2}$$

- Pour $k = 1$, une variante plus symétrique de cette distribution nous sera utile : pour $A \in U(N')$ on note $\{e(\theta'_1),\dots,e(\theta'_{N'})\}$ l'ensemble des valeurs propres de A avec $\theta'_i \in]-1,1]$ et on pose pour $A \in G(N) \subset U(N')$ et ϕ symétrique :

$$W(A,\phi) := \sum_{1\le i\le N'} \phi(\hat{\theta}'_i),\ \textit{et}\ W(G(N),\phi) := \int_{G(N)} W(A,\phi)dA \tag{3}$$

  Quand N est grand $W_k(A)$ et $W(A)$ décrivent la répartition des valeurs propres de A dans un $1/N$-voisinage du point 1.

- *La mesure de répartition de la k-ième valeur propre* définie pour toute fonction sur $\mathbb{R}_{\ge 0}$ à décroissance rapide :

$$\nu_k(A,\phi) := \phi(\hat{\theta}_k),\ \textit{et}\ \nu_k(G(N),\phi) := \int_{G(N)} \phi(\hat{\theta}_k(A))dA \tag{4}$$

  Quand N est grand, $\nu_k(A)$ décrit la répartition de la k-ième valeur propre dans un $1/N$-voisinage du point 1.

- *La distribution de corrélation d'ordre k* définie pour toute fonction ϕ sur $\mathbb{R}^k$, symétrique en toutes les variables, invariante par la translation de vecteurs $u(1,\dots,1)$, $u \in \mathbb{R}$ (ϕ ne dépend que des différences entre les variables) et à décroissance rapide modulo $\mathbb{R}(1,\dots,1)$ par

$$R_k(A,\phi) := \frac{k!}{N} \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le N} \phi(\hat{\theta}_{i_1},\dots,\hat{\theta}_{i_k}),\ \textit{et}\ R_k(G(N),\phi) := \int_{G(N)} R_k(A,\phi)dA \tag{5}$$

  Quand N est grand $R_k(A)$ "compte" le nombre de "paquets" de k valeurs propres concentrées dans des petits intervalles de longueur $\approx 1/N$ du cercle.

- *la mesure d'espacement d'indice k* définie pour toute fonction ϕ continue sur $\mathbb{R}^+$ à décroissance rapide :

$$\mu_k(A,\phi) := \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} \phi(\hat{\theta}_{i+k} - \hat{\theta}_i),\ \textit{et}\ \mu_k(G(N),\phi) := \int_{G(N)} \mu_k(A,\phi)dA \tag{6}$$

Quand N est grand $\mu_k(A)$ "compte" le nombre de suites de k valeurs propres consécutives concentrées dans des petits intervalles de longueur $\approx 1/N$ du cercle .

Dans [KSa], Katz et Sarnak étudient le comportement de ces distributions lorsque $G(N)$ décrit l'une des familles de groupes compacts précédentes et $N \to +\infty$:

THÉORÈME 1.1. — *Pour $G = U, Sp, O, SO^+, SO^-$ l'une des familles de groupes compacts ci-dessus, quand $N \to +\infty$, les distributions $W(G(N))$, $W_k(G(N))$, $\nu_k(G(N))$, $R_k(G(N))$, $\mu_k(G(N))$, convergent faiblement vers des distributions limites $W(G)$, $W_k(G)$, $\nu_k(G)$, $R_k(G)$, $\mu_k(G)$, et les quatre dernières ont des densités continues par rapport à la mesure de Lebesgue (de plus $\mu_k(G)$ et $\nu_k(G)$ sont encore des mesures de probabilité) : pour toute fonction test ϕ de l'espace approprié on a*

$$\lim_{N\to+\infty} W(G(N),\phi) = W(G,\phi) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)W(G)(x)dx.$$

$$\lim_{N\to+\infty} W_k(G(N),\phi) = W_k(G,\phi) = \int_{\mathbb{R}^k_{\geq 0}} \phi(\mathbf{x})W_k(G)(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

$$\lim_{N\to+\infty} \nu_k(G(N),\phi) = \nu_k(G,\phi) = \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \phi(x)\nu_k(G)(x)dx,$$

$$\lim_{N\to+\infty} R_k(G(N),\phi) = \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \phi(\mathbf{x}, -\sum_{i=1}^{k-1} x_i)R_k(G,\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

$$\lim_{N\to+\infty} \mu_k(G(N),\phi) = \mu_k(G,\phi) = \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \phi(x)\mu_k(G)(x)dx$$

de plus on a une "loi des grand nombres" avec une estimation explicite de la vitesse de convergence : pour tout $\varepsilon > 0$

$$\int_{G(N)} \sup_{f,\ |f|\leq 1} |D(A,\phi) - D(G,\phi)|dA \ll_\varepsilon N^{\varepsilon - 1/6},\ \ D = \mu_k, \nu_k \tag{7}$$

où le supremum est pris sur les fonctions continues à décroissance rapide et bornées par 1.

On peut calculer assez explicitement les densités de ces distributions. En particulier on trouve que les distributions d'espacement $\mu_k(G)$ et $R_k(G)$ sont égales entre elles et à celles trouvées pour les ensembles GUE et GOE ([KSa] Theorem 1.2.1) ; ainsi la densité de $R_k(G)$ en $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{k-1}$ vaut (voir (10))

$$R_k(G)(\mathbf{x}) = R_k(U)(\mathbf{x}) = W_k(U)((\mathbf{x}, -\sum_i x_i)) \quad \text{et} \quad R_2(G)(x) = 1 - (\frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x})^2.$$

En revanche, les distributions décrivant la répartition des valeurs propres au voisinage de 1, $\nu_k(G)$, $W_k(G)$, $W(G)$ ne sont pas universelles et dépendent de G : pour $\nu_k(G)$ et $W_k(G)$ on trouve trois limites possibles :

- le cas unitaire : $\nu_k(U) =: \nu_k$, $W_k(U) =: W_k$,

- le cas orthogonal pair : $\nu_k(SO^+) =: \nu_{k,+}$, $\quad W_k(SO^+) =: W_{k,+}$,
- le cas symplectique et le cas orthogonal impair donnent les mêmes distributions

$$\nu_k(Sp) = \nu_k(SO^-) =: \nu_{k,-}, \qquad W_k(Sp) = W_k(SO^-) =: \nu_{k,-}.$$

Cette dernière égalité signifie que les valeurs propres d'une matrice unitaire symplectique générique et de grand rang et les valeurs propres *non-triviales* d'une matrice orthogonale de déterminant 1, générique et de grand rang impair ont la même répartition au voisinage de 1.

Enfin les distributions $W(G)$ sont distinctes pour tous les G et on a

$$W(U,\phi) = \frac{1}{2}(W_1(\phi) + W_1(\phi(-x)),$$

$$W(SO^+,\phi) = \frac{1}{2}(W_{1,+}(\phi) + W_{1,+}(\phi(-x)),$$

$$W(Sp,\phi) = \frac{1}{2}(W_{1,-}(\phi) + W_{1,-}(\phi(-x)), \tag{8}$$

$$W(SO^-,\phi) = \phi(0) + \frac{1}{2}(W_{1,-}(\phi) + W_{1,-}(\phi(-x)),$$

$$W(O,\phi) = \frac{1}{2}(W(SO^+,\phi) + W(SO^-,\phi)).$$

1.2. **Formules pour les densités**

Les densités limites des distributions précédentes sont calculées dans [KSa] en généralisant aux autres groupes compacts la méthode des polynômes orthogonaux de Gaudin et les méthodes de Mehta. Le point de départ est la formule d'intégration de Weyl qui exprime l'intégrale d'une fonction centrale de $G(N)$ comme une intégrale explicite sur le tore maximal de $G(N)$.

On décrit ici certains de ces calculs pour les groupes unitaires, les autres sont assez similaires. Soit $\phi(A) = \phi(\theta_1, \dots, \theta_N)$. La formule d'intégration de Weyl fournit

$$\int_{U(N)} \phi(A)dA = \frac{1}{N!}\int_{[0,1[^N} \phi(\theta_1,\dots,\theta_N)\prod_{i<j}|e(\theta_i) - e(\theta_j)|^2 d\theta_1 \dots d\theta_N. \tag{9}$$

On reconnait dans le produit $\prod_{i<j}|e(\theta_i) - e(\theta_j)|^2$ le carré du module d'un déterminant de Vandermonde; c'est aussi le déterminant $\det_{N\times N} K_N(\theta_i - \theta_j)$ où $K_N(\theta)$ est le noyau

$$K_N(\theta) = \sum_{j=0}^{N-1} e(j\theta) = e((N-1)\theta/2)\frac{\sin \pi N\theta}{\sin \pi\theta}.$$

Pour T une indéterminée et $s \geq 0$ on prend pour fonction $\phi(A)$ le polynôme $P_s(A,T) = \prod_{i=1}^N (1 + T\chi_{[0,s]}(N\theta_i))$ où $\chi_{[0,s]}$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[0,s]$. D'une part, on a

$$P_s(U(N),T) = \int_{U(N)} \phi(A)dA = \sum_{k\geq 0} W_k(U(N), \chi_{[0,s]})T^k = \sum_{k\geq 0}(1+T)^k E(k, U(N), s)$$

où $E(k,U(N),s) = \int_{U(N)} \chi_{[0,s]}(N\theta_{k(A)})dA = \nu_k(U(N), \chi_{[0,s]})$ est la mesure de l'ensemble des matrices tel que l'angle de la k-ième valeur propre est dans $[0, s/N]$. D'autre part, la formule d'intégration de Weyl (9) et la méthode des polynômes orthogonaux de Gaudin ([KSa] Key Lemma 5.1.3, et theorem 6.3.5, 6.3.6) permet de montrer que $P_s(U(N),T)$ est le déterminant de Fredholm de l'opérateur intégral (de rang fini égal à N) de noyau $K_N(\theta,\theta')$ sur $L^2([0,s/N],d\theta)$. C'est aussi par le changement de variable $x = N\theta$, le déterminant de Fredholm de l'opérateur intégral de noyau $\frac{1}{N}K_N(x/N, y/N)\chi_{[0,s]}(y)$ sur $L^2([0,s],dx)$. Quand $N \to +\infty$, on a

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}K_N(x/N, y/N)\chi_{[0,s]}(y) = K_s(x,y) := e((x-y)/2)\frac{\sin(\pi(x-y))}{\pi(x-y)}\chi_{[0,s]}(y)$$

uniformément et les coefficients de $P_s(U(N),T)$ convergent vers ceux du déterminant de Fredholm $P_s(U,T) = \det(1 + TK_s|L^2([0,s],dx))$. On en déduit la convergence des distributions $W_k(U(N))$ et $\nu_k(U(N))$ vers des limites $W_k(U)$ et $\nu_k(U)$. On voit ainsi que la densité de $W_k(U)$ en $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ vaut

$$W_k(U)(\mathbf{x}) = \frac{1}{k!}\det_{k\times k}(K(x_i - x_j))_{1\leq i,j\leq k},\ K(x-y) = \frac{\sin(\pi(x-y))}{\pi(x-y)}. \tag{10}$$

Enfin, notant $1 \geq \lambda_0(s) \geq \lambda_1(s) \geq \dots$ les valeurs propres de K_s, on a

$$\lambda_j(s)f(y) = \int_0^s f(x)K_s(x,y)dx.$$

L'égalité

$$\det(1 + TK_s|L^2([0,s],dx)) = \prod_{j\geq 0}(1 + T\lambda_j(s))$$

permet de calculer les densités $\nu_k(U)(x)$ et de tracer leur graphe, par exemple

$$\nu_1(U)(x) = -\frac{d}{dx}\prod_{j\geq 0}(1 - \lambda_j(x)).$$

Des calculs similaires sont faits pour les autres groupes dans [KSa].

On obtient par exemple pour $k = 1$ et ϕ bornée mesurable à décroissance rapide sur $\mathbb{R}$ (cf. (8))

$$W(U,\phi) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(x)\delta_0(x)dx,$$

$$W(SO^+,\phi)) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)(1 + \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x})dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(x)(\delta_0(x) + \chi_{[-1,1]}(x))dx, \tag{11}$$

$$W(Sp,\phi) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)(1 - \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x})dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(x)(\delta_0(x) - \chi_{[-1,1]}(x))dx,$$

$$W(SO^-,\phi)=\phi(0)+\int_{\mathbb{R}}\phi(x)(1-\frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x})dx=\int_{\mathbb{R}}\hat{\phi}(x)(1+\delta_0(x)-\chi_{[-1,1]}(x))dx.$$
$$W(O,\phi)=\frac{\phi(0)}{2}+\int_{\mathbb{R}}\phi(x)dx=\int_{\mathbb{R}}\hat{\phi}(x)(\frac{1}{2}+\delta_0(x))dx.$$

D'autre part les développements de Taylor en 0 des densités ν_1 sont

(12) $\nu_1(x)=1-\frac{\pi^2}{9}s^3+O(s^5),\ \nu_{1,+}(x)=2-\frac{2\pi^2}{3}s^2+O(s^4),\ \nu_{1,-}(x)=\frac{2\pi^2}{3}s^2+O(s^4)$

Remarque 1.2. — l'annulation à l'ordre 2 du dernier développement montre que le point "critique" 1 tend à "repousser" (quadratiquement) les valeurs propres (non triviales) des matrices orthogonales impaires ou symplectiques. Comme on le verra c'est ce phénomène de répulsion dans le cas symplectique qui est à la base du théorème de Conrey–Soundararajan. Dans le cas unitaire ou orthogonal pair, un tel phénomène n'existe pas et les matrices de ce type peuvent avoir des valeurs propres très proches de 1 ; de plus les matrices orthogonales paires tendent à avoir (deux fois) "plus" de zéros au voisinage de 1 que les matrices unitaires.

1.3. **Les Moments du polynôme caractéristique d'une matrice aléatoire**

Motivés par les conjectures de Conrey et Ghosh ([CG]) sur les moments de la fonction ζ de Riemann (voir ci-dessous), Keating et Snaith [KSn1, KSn2] ont étudié le comportement quand $N\to+\infty$ d'une autre variable aléatoire de $G(N)$: la valeur au point *critique* 1 de son polynôme caractéristique; plus précisément ils ont calculé les "moments", pour $k\in\mathbb{C}$

$$M(G(N),s):=\int_{G(N)}|\det(I-A)|^k dA$$

(parallèlement, Brezin et Hikami [BH] ont étudié ces moments pour d'autres ensembles (non-compacts) dont les ensembles GUE et GOE), le résultat de leur calcul est donné dans le

Théorème 1.3. — *Soit $k\in\mathbb{C}$ fixé. Lorsque $N\to+\infty$, on a les identités*

$$M(U(N),k)=\prod_{j=1}^{N}\frac{\Gamma(j)\Gamma(j+k)}{\Gamma(j+k)^2}=g_U(k)N^{(k/2)^2}(1+o_k(1)),$$
$$M(USp(2N),k)=2^{2Nk}\prod_{j=1}^{N}\frac{\Gamma(N+j+1)\Gamma(j+k+1/2)}{\Gamma(j+1/2)\Gamma(N+j+k+1)}=g_{Sp}(k)N^{k(k+1)/2}(1+o_k(1)),$$
$$M(SO(2N),k)=2^{2Nk}\prod_{j=1}^{N}\frac{\Gamma(N+j-1)\Gamma(j+k-1/2)}{\Gamma(j-1/2)\Gamma(N+j+k-1)}=g_{SO^+}(k)N^{k(k-1)/2}(1+o_k(1)),$$

avec

(13) $$\gamma_U(k)=(k/2)^2,\ \gamma_{Sp}(k)=k(k+1)/2,\ \gamma_{SO^+}(k)=k(k-1)/2$$
$$g_U(k)=\frac{G(1+k/2)^2}{G(1+k)},$$

$$g_{Sp}(k) = 2^{k^2/2} \frac{G(1+k)\sqrt{\Gamma(1+k)}}{\sqrt{G(1+2k)\Gamma(1+2k)}},$$

$$g_{SO^+}(k) = 2^{k^2/2} \frac{G(1+k)\sqrt{\Gamma(1+2k)}}{\sqrt{G(1+2k)\Gamma(1+k)}},$$

où $G(\ .\ )$ est la fonction G de Barnes [EMOT] *définie par*

$$G(1+z) = (2\pi)^{z/2} e^{-[(1+\gamma)z^2+z]/2} \prod_{n=1}^{\infty} [(1+z/n)^n e^{-z+z^2/(2n)}]$$

elle vérifie $G(1) = 1$ et $G(z+1) = G(z)\Gamma(z)$. En particulier si $k \geq 1$ est un entier, $g_U(2k)$, $g_{Sp}(k)$, $g_{SO^+}(k)$ sont des rationnels positifs,

$$g_U(2k) = \prod_{j=0}^{k} \frac{j!}{(k+j)!}, \quad g_{Sp}(k) = \Big(\prod_{j=1}^{k} (2j-1)!!\Big)^{-1}, \quad g_{SO^+}(k) = 2^k \Big(\prod_{j=1}^{k-1} (2j-1)!!\Big)^{-1}.$$

Remarque 1.4. — On a évidemment $M(SO(2N+1), k) = 0$. Dans ce cas, il est naturel de calculer les moments de la dérivée en 1 du polynôme caractéristique, on trouve

$$M'(SO(2N+1), k) = \int_{SO(2N+1)} \Big|\frac{d}{dT} \det(T-A)_{|T=1}\Big|^k dA = \frac{1}{2} M(SO(2N), k+1).$$

De même on trouve que

$$M(O^-(2N+1), k) = \int_{SO(2N+1)} |\det(I+A)|^k dA = 2^k M(USp(2N), k-1).$$

On pourra se reporter à [KSn1, KSn2] pour la preuve de ces énoncés. Disons simplement que le calcul utilise à nouveau la forme explicite des formules d'intégration de Weyl et l'évaluation exacte des intégrales de Selberg dont une version est l'identité

$$\int_{-1}^{1} \cdots \int_{-1}^{1} \prod_{1 \leq i < j \leq N} |x_i - x_j|^{2\gamma} \prod_j (1-x_j)^{\alpha-1} (1+x_j)^{\beta-1} dx_1 \ldots dx_N$$

$$= 2^{\gamma N(N-1)+N(\alpha+\beta-1)} \prod_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(1+\gamma+j\gamma)\Gamma(\alpha+j\gamma)\Gamma(\beta+j\gamma)}{\Gamma(1+\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma(N+j-1))}$$

pour

$$\Re e\alpha > 0, \quad \Re e\beta > 0, \quad \Re e\gamma > -\min\Big(\frac{1}{N}, \frac{\Re e\alpha}{N-1}, \frac{\Re e\beta}{N-1}\Big).$$

2. FAMILLES DE FONCTIONS L SUR LES CORPS FINIS

Le cas où le lien entre les zéros des matrices aléatoires et ceux des fonction L est particulièrement transparent est celui des familles de fonctions L sur un corps fini $\mathbb{F}_q$.

L'exemple le plus simple est celui des courbes : soit $C/\mathbb{F}_q$ une courbe projective lisse définie sur $\mathbb{F}_q$, sa fonction L est la série formelle en q^{-s} définie par

$$L(C,s) = \exp\Big(\sum_n \frac{|C(\mathbb{F}_{q^n})|}{n} q^{-ns}\Big) = P(C,s)/(1-q^{-s})(1-q^{1-s})$$

et l'on sait que $P(C,s)$ est un polynôme unitaire en q^{-s} de degré $2g$ à coefficients entiers qui vérifie l'équation fonctionnelle $q^{g(1-s)}P(C,1-s) = q^{gs}P(C,s)$. D'après Weil (l'hypothèse de Riemann pour $L(C,s)$), les zéros de $P(C,s)$ sont sur la droite $\Re es = 1/2$ (et sont répartis symétriquement sur cette droite). On note $0 \leq \frac{2\pi\theta_1}{\log q} \leq \cdots \leq \frac{2\pi\theta_g}{\log q} \leq \frac{\pi}{\log q}$, les parties imaginaires des g "premiers" zéros de $P(C,s)$. En posant $\hat{\theta}_i = 2g\theta_i$, on définit de manière analogue aux équations (2),...,(6) et après des distributions $\mu_k(C,\phi)$, $R_k(C,\phi)$, $\nu_k(C,\phi)$, $W_k(C,\phi)$. On note alors $\mathcal{M}_g(\mathbb{F}_q)$ l'ensemble des classes de $\mathbb{F}_q$ isomorphismes de courbes de genre g définies sur $\mathbb{F}_q$, c'est un ensemble fini de cardinal $q^{3g-3}(1+O_g(q^{-1/2}))$ ([KSa] 10.6.9–26). Katz et Sarnak considèrent alors la famille $\{L(C,s)\}_{C\in\mathcal{M}_g(\mathbb{F}_q)}$, et les distributions obtenues par moyenne sur $\mathcal{M}_g(\mathbb{F}_q)$ (pour $D = \mu_k, R_k, \nu_k, W_k$) :

$$D(\mathcal{M}_g(\mathbb{F}_q),\phi) = \frac{1}{|\mathcal{M}_g(\mathbb{F}_q)|}\sum_{C\in\mathcal{M}_g(\mathbb{F}_q)} D(C,\phi)$$

Théorème 2.1 ([KSa] 12.2). — *Pour $D = \mu_k, R_k, \nu_k, W_k$ on a*

$$\lim_{g\to+\infty}\lim_{q\to+\infty} D(\mathcal{M}_g(\mathbb{F}_q),\phi) = D(Sp,\phi)$$

où q décrit l'ensemble de toutes les puissances des nombres premiers. De plus pour $D = \mu_k, \nu_k$ on a une loi des grands nombres : pour tout $\varepsilon > 0$

$$\lim_{q\to+\infty}\frac{1}{|\mathcal{M}_g(\mathbb{F}_q)|}\sum_{C\in\mathcal{M}_g(\mathbb{F}_q)}\sup_{|f|\leq 1}|D(C,\phi)-D(Sp,\phi)| \ll_\varepsilon g^{\varepsilon-1/6}.$$

Remarque 2.2. — Ce théorème dit donc que les zéros de la fonction L d'une courbe "générique" (au sens de la mesure) de grand rang se répartissent au voisinage de 1 comme les zéros d'une matrice unitaire symplectique de grand rang. On peut également remarquer que la caractéristique des corps finis n'est pas fixée.

2.1. Familles de fonctions L sur les corps finis et $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-faisceaux

Ce résultat est un cas particulier d'un principe beaucoup plus général qui combine le Théorème 1.1, avec le théorème d'équidistribution de Deligne pour les classes de conjugaisons de Frobenius des $\overline{\mathbb{Q}}$-faisceaux (Théorème 2.3). Soient k un corps fini et S un schéma sur k lisse et géométriquement connexe ; soient $\overline{\eta}$ le point géométrique générique et $\pi := \pi_1(S,\overline{\eta})$ le groupe fondamental de S. On note également $\pi^{geom} = \pi_1(S\otimes_k \overline{k},\overline{\eta})$ le groupe fondamental géométrique. On rappelle également que tout point fermé $x\in S(k')$ (k' une extension finie de k) défini dans π, une classe de conjugaison de Frobenius qu'on note Frob_x.

Reste à définir la notion de famille de fonctions L dans ce contexte: elle provient de celle des $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-faisceaux. Soient $\ell \neq \mathrm{car}(k)$ un premier, et $\overline{\mathbb{Q}_\ell} \subset \mathbb{C}$ une clotûre algébrique de $\mathbb{Q}_\ell$ plongée contenue dans $\mathbb{C}$. Un $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-faisceau $\mathcal{F}$ de rang $N' \geq 1$ est par définition une représentation continue ρ de π dans un $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-vectoriel de dimension N' noté $\mathcal{F}_{\overline{\eta}}$. On note G^{arith} (resp. G^{geom}) la clotûre de Zariski de l'image $\rho(\pi)$ (resp. $\rho(\pi^{geom})$) dans $GL(\mathcal{F}_{\overline{\eta}}) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \mathbb{C} \simeq GL_{N'}(\mathbb{C})$, c'est le *groupe de monodromie arithmétique* (resp. *géométrique*). $\mathcal{F}$ est dit pur de poids 0 si pour tout point fermé x, les valeurs propres de $\rho(\mathrm{Frob}_x)$ sont de module 1. Un résultat fondamental de [De2] est que si $\mathcal{F}$ est pur de poids zéro (ce que nous supposerons dans toute la suite), le groupe G^{geom} est semi-simple. La famille des fonctions L que nous considérons est celle des polynômes caractéristiques des Frobenius $\rho(\mathrm{Frob}_x)$ quand x parcours l'ensemble des points fermés de S et plus précisément on considère les familles indexées par les extension finies de k

$$\{L(x,s) := \det(I - |k'|^{-s}\mathrm{Frob}_x|\mathcal{F}_{\overline{\eta}})\}_{x \in S(k')}.$$

À ce stade on fait deux hypothèses supplémentaires:

- *On a égalité des groupes de monodromie géométrique et arithmétique $G^{arith} = G^{geom}$.* Cette hypothèse (et le fait que $\mathcal{F}$ est pur de poids 0) implique que pour tout point fermé x, $\rho(\mathrm{Frob}_x)$ définit une unique K-classe de conjugaison dans K. Le théorème d'équidistribution de Deligne est que ses classes de conjugaisons sont équiréparties relativement à la mesure de Sato-Tate :

  Théorème 2.3. — *(Deligne,* [De2]*) Pour toute fonction Φ sur K, centrale et continue, on a*

  $$\lim_{[k':k]\to+\infty} \frac{1}{|S(k')|} \sum_{x \in S(k')} \Phi(\rho(\mathrm{Frob}_x)) = \int_K \Phi(A)dA.$$

- *Un compact maximal K de $G^{geom}(\mathbb{C})$ est isomorphe à l'un des groupes $U(N)$, $USp(2N)$, ou $O(N)$.* Pour tout point fermé x, on peut alors considérer les parties imaginaires des r premiers zéros

  $$0 \leq \frac{2\pi\theta_1(x)}{\log q} \leq \cdots \leq \frac{2\pi\theta_r(x)}{\log q} \leq \frac{2\pi}{\log q},$$

  et former les distributions $\mu_k(x,\phi), R_k(x,\phi), \nu_k(x,\phi), W_k(x,\phi)$.

Puisque les distributions $D(x,\phi)$ proviennent de fonctions centrales sur K, on déduit de l'énoncé précédent la limite

$$\lim_{[k':k]\to+\infty} \frac{1}{|S(k')|} \sum_{x \in S(k')} D(x,\phi) = D(G(N),\phi),$$

et pour $D = \mu_k, \nu_k$, en utilisant (7) on obtient la majoration : pour tout $\varepsilon > 0$

$$\lim_{[k':k]\to+\infty} \frac{1}{|S(k')|} \sum_{x \in S(k')} |D(x,\phi) - D(G,\phi)| \ll_\varepsilon N^{\varepsilon - 1/6}. \tag{14}$$

Finalement si on dispose d'une suite $\mathcal{F}_N$ de faisceaux lisses sur S purs de poids zéro et vérifiant les hypothèses précédentes on déduit du Théorème 1.1

$$\lim_{N\to+\infty}\lim_{[k':k]\to+\infty}\frac{1}{|S(k')|}\sum_{x\in S(k')}D(x,\phi)=D(G,\phi). \tag{15}$$

Preuve (du Théorème 2.1) — Pour obtenir le théorème 2.1, on ne peut utiliser directement le formalisme précédent car $\mathcal{M}_g(k)$ ne correspond pas à l'ensemble des points fermés d'un schéma (le foncteur correspondant n'est pas représentable) et pour contourner ce problème Katz et Sarnak utilisent plutôt l'ensemble $\mathcal{M}_{g,3K}(k)$ qui paramétrise les paires (C,α) de classes de k-isomorphismes de courbes munies d'un plongement tricanonique qui correspond à un foncteur représentable. En fait $\mathcal{M}_{g,3K}(k)$ est l'ensemble des k-points d'un schéma lisse défini sur $Spec(\mathbb{Z})$ et à fibres géométriquement connexes; on peut alors former à partir de la courbe universelle $(\mathcal{C},\alpha)\to\mathcal{M}_{g,3K}$ un $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-faisceau $\mathcal{F}_g$ de rang $2g$, pur de poids 0, tel que pour tout point $x=(C,\alpha)$ on ait

$$L(x,s)=L(C,s+1/2).$$

De plus pour ce faisceau on a $G^{geom}=G^{arith}=Sp(\mathbb{C})$ et on en déduit (14) et (15). Enfin pour passer de $\mathcal{M}_{g,3K}(k)$ à $\mathcal{M}_g(k)$ on note que la flèche ensembliste d'oubli des structures $(C,\alpha)\to C$ est à fibres de cardinal constant $GL_{5g-5}(k)$ en dehors du sous-ensemble constitué des courbes C ayant des automorphismes non-triviaux. On achève la preuve en constatant que ce sous-ensemble est négligeable quand $|k|$ devient grand.

D'autre part l'uniformité suivant la caractéristique dans l'énoncé du Théorème 2.1 provient du fait que $\mathcal{M}_{g,3K}$ et $\mathcal{F}_g$ sont définis sur $\mathbb{Z}[1/\ell]$ et qu'on dispose d'une version uniforme du Théorème d'équidistribution de Deligne.

On renvoie à [KSa] Chap. 9 et 10 pour plus de détails et d'autres exemples de faisceaux qui réalisent les autres lois, par exemple le faisceau de Kloosterman $\mathcal{K}l_r$ associé aux sommes de Kloosterman en r variables vérifie les hypothèses H.1 et H.2 : si la caractéristique du corps n'est pas 2, $G^{geom}(\mathcal{K}l_r)$ vaut Sp_r ou SL_r suivant que r est pair ou non et les lois obtenues sont celles de Sp ou de U ; en caractéristique 2, $G^{geom}(\mathcal{K}l_r)$ vaut SO_r et les lois rencontrées sont celles de SO^+ ou SO^- suivant la parité de r (voir [Ka] pour une étude détaillée des faisceaux de Kloosterman).

Le point important à retenir de cette section est que la distribution des zéros des familles algébriques de functions L sur les corps finis a une interprétation très simple : les lois de distributions sont données par la nature du groupe de monodromie géométrique.

3. FAMILLES DE FONCTIONS L SUR LES CORPS DE NOMBRES

Dans cette section nous introduisons diverses familles (notées $\mathcal{F}$) de fonctions L attachées aux formes automorphes cuspidales de $GL_d(\mathbf{A}_\mathbb{Q})$. On rappelle que pour une normalisation convenable (si le caractère central est unitaire) une telle fonction $L(f,s)$ est une série de Dirichlet qui admet une factorisation en produit eulérien de facteurs locaux en chaque premier p

$$L(f,s)=\sum_{n\geq 1}\frac{\lambda_f(n)}{n^s}=\prod_p L_p(f,s).$$

Pour chaque premier p, $L_p(f,s)^{-1}$ est un polynôme en p^{-s} de degré $\leq d$ (et de degré $=d$ à un nombre fini de p près) ; ce polynôme est de la forme

$$L_p(f,s)^{-1}=\prod_{i=1}^{d}(1-\alpha_{f,i}(p)p^{-s})$$

où les $\alpha_{f,i}(p)$ sont des complexes qu'on appelle les paramètres locaux de f en p. Pour la place à l'infini, on a également un facteur local de la forme

$$L_\infty(f,s)=\prod_{i=1}^{d}\Gamma_{\mathbb{R}}(s+\mu_{f,i}),\ \text{avec}\ \ \Gamma_{\mathbb{R}}(s)=\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\ \text{et}\ \Re e\mu_{f,i}>-1/2.$$

On sait alors [GoJ] que la fonction L complète $\Lambda(f,s)=L_\infty(f,s)L(f,s)$ admet un prolongement holomorphe à $\mathbb{C}$ (sauf si $L(f,s)$ est la fonction ζ) et qu'elle vérifie une équation fonctionnelle de la forme

$$q_f^{s/2}\Lambda(f,s)=\varepsilon_f q_f^{(1-s)/2}\Lambda(\overline{f},1-s)(=\varepsilon_f q_f^{(1-s)/2}\overline{\Lambda(f,1-\overline{s})}) \tag{16}$$

où q_f est un entier (appelé le conducteur de f), $\overline{f}$ désigne la contragrédiente de f et ε_f est un nombre complexe de module 1, (le "signe" de l'équation fonctionnelle). Par la théorie de Rankin-Selberg [JS, JPPS], on sait également que le produit eulérien $L(f,s)$ converge absolument pour $\Re es>1$ et donc que $\Lambda(f,s)$ a tous ces zéros dans la bande critique $0\leq\Re es\leq 1$ (on sait même que ces inégalités sont strictes). Comme $\Lambda(f,s)$ est une fonction d'ordre 1, on a la factorisation en produit de Hadamard

$$\Lambda(f,s)=\Lambda(f,0)\exp(\frac{\Lambda'(f,0)}{\Lambda(f,0)}s)\prod_\rho(1-\frac{s}{\rho})e^{s/\rho}, \tag{17}$$

où ρ que l'on note $\rho=1/2+i\gamma$ parcours l'ensemble des zéros de $\Lambda(f,s)$ ($|\Im m\gamma|<1/2$). On a bien entendu l' Hypothèse de Riemann Généralisée

Hypothèse de Riemann Généralisée (HRG).— *Pour tout ρ, on a $\Im m\gamma=0$.*

Un outil fondamental pour l'étude des zéros de $\Lambda(f,s)$ est la formule explicite de Riemann-Weil. On la donne sous la forme "localisée" suivante [ILS] (4.11), (4.13) (dans la formule (4.13) de [ILS] le $2\pi ix$ devrait être πix) :

Proposition 3.1. — *Soient $Q>1$ et ϕ une fonction lisse sur $\mathbb{R}$ à décroissance rapide dont la transformée de Fourier $\hat{\phi}(y)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\phi(x)e^{ixy}dy$ est à support compact (en particulier ϕ se prolonge en une fonction lisse sur $\mathbb{C}$), on a si $L(f,s)\neq\zeta(s)$*

(18)

$$\sum_\rho\phi(\frac{\gamma}{2\pi}\log Q)=\frac{A_f}{\log Q}-\sum_p\sum_{\nu\geq 1}\frac{1}{p^{\nu/2}\log Q}\Big(\Lambda_f(p^\nu)\hat{\phi}(\frac{\nu\log p}{\log Q})+\overline{\Lambda_f}(p^\nu)\hat{\phi}(-\frac{\nu\log p}{\log Q})\Big).$$

avec

$$A_f = \hat{\phi}(0)\log q_f + A_f(\infty), \tag{19}$$

$$A_f(\infty) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \sum_{i=1}^{d} \Big(\frac{\Gamma'_{\mathbb{R}}}{\Gamma_{\mathbb{R}}}(\mu_{f,i} + \ \frac{1}{2} + \frac{2\pi i x}{\log Q}) + \frac{\Gamma'_{\mathbb{R}}}{\Gamma_{\mathbb{R}}}(\overline{\mu_{f,i}} + \frac{1}{2} - \frac{2\pi i x}{\log Q}\Big)dx,$$

et

$$\Lambda_f(p^\nu) = \log p \sum_{i=1}^{d} \alpha_{f,i}^{\nu}(p)$$

qui est le p^ν*-ième coefficient de la série de Dirichlet* $-\frac{L'(f,s)}{L(f,s)} = -\sum_p \frac{L'_p(f,s)}{L_p(f,s)}$. *Si* $L(f,s) = \zeta(s)$ *on doit ajouter au membre de gauche le terme* $\phi(\frac{1}{4\pi i}\log Q) + \phi(-\frac{1}{4\pi i}\log Q)$.

Preuve.— On pose $G(s) = \phi((s-\frac{1}{2})\frac{\log Q}{2\pi i})$ et on considère l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(2)} G(s)\frac{\Lambda'(f,s)}{\Lambda(f,s)}ds$$

où l'intégration est le long de la droite verticale $\Re e s = 2$; on décale le contour d'integration à $\Re e s = -1$ en passant des pôles en $s = \rho$ de résidu $G(\rho)$ (et éventuellement en $s = 0, 1$ de résidue $-G(0),\ -G(1)$), on fait le changement de variable $s \to 1-s$ et on utilise l'équation fonctionnelle

$$-\frac{\Lambda'(\overline{f}, 1-s)}{\Lambda(\overline{f}, 1-s)} = \log q_f + \frac{\Lambda'(f,s)}{\Lambda(f,s)}.$$

3.1. Distribution des zéros de grande hauteur

A propos de la distribution des zéros des fonctions $L(f,s)$, on peut considérer deux types de problèmes.

Le premier consiste à fixer f et à étudier la distribution des zéros non triviaux $\rho = 1/2 + i\gamma$ de $L(f,s)$ de grande hauteur, par exemple tels que $|\gamma| \approx T$ pour $T \to +\infty$. Dans ce cadre, étendant le résultat de Montgomery aux fonctions $L(f,s)$, Rudnick et Sarnak [RS] ont établis un résultat très général sur la distribution des écarts entre ces zéros : tout d'abord si on note $N(T,f)$ le nombre de zéros non triviaux de f de hauteur $\le T$, on a quand $T \to +\infty$

$$N(f,T) = |\{\rho,\ L(f,\rho) = 0,\ |\Re\rho - 1/2| < 1/2,\ 0 \le \Im\rho \le T\}| = \frac{d}{2\pi} T\log T(1 + o(1)),$$

de sorte que l'écart moyen entre les parties imaginaires de deux zéros consécutif de cet ensemble est $\sim 2\pi/d\log T$. On peut former, à l'aide des γ, des distributions analogues à celles contruites dans les sections précédentes. Par exemple, fixons h une fonction sur $\mathbb{R}$

lisse et à décroissance rapide, on définit $R^h_{2,f}(T,\phi)$ la distribution de corrélation des paires normalisés

$$\phi \to R^h_{2,f}(T,\phi) = \frac{2\pi}{dT\log T}\sum_{i\neq j} h(\frac{\gamma_i}{T})h(\frac{\gamma_j}{T})\phi(\frac{m}{2\pi}\log T(\gamma_i-\gamma_j))$$

pour toute fonction lisse ϕ et à décroissance rapide sur $\mathbb{R}$.

Remarque 3.2. — On remarque que, même si les γ_i ne sont pas réels, cette somme est bien définie par les prolongements à $\mathbb{C}$ de h et ϕ obtenus par transformée de Fourier inverse. L'introduction du facteur $h(\frac{\gamma_i}{T})h(\frac{\gamma_j}{T})$ est une manière lisse de localiser la sommation sur les zéros de hauteur $\approx T$. On peut définir de manière analogue des distributions $R^h_{k,f}(T,\phi), \mu^h_{k,f}(T,\phi), W^h_{k,f}(T,\phi), \nu^h_{2,f}(T,\phi)$

Le résultat suivant est un analogue "lisse" du Théorème 0.1. Pour $L(f,s)$, on remarque que la première partie de l'énoncé n'utilise pas d'Hypothèse de Riemann :

Théorème 3.3 (Rudnick-Sarnak [RS]). — *Soit f une forme automorphe cuspidale sur $GL_d(\mathbf{A}_{\mathbb{Q}})$ satisfaisant la condition technique*

$$\forall\nu\geq 2,\ \sum_{\nu\geq 2}\sum_{p}\frac{|\Lambda_f(p^\nu)|^2}{p^\nu} < +\infty$$

(cette condition est vérifiée pour $d\leq 3$ et est une conséquence faible de la conjecture de Ramanujan-Petersson en général). Soit h la transformée de Fourier d'une fonction lisse à support compact sur $\mathbb{R}$. Alors pour toute fonction ϕ lisse sur $\mathbb{R}$ dont la transformée de Fourier $\hat{\phi}$ est à support compact dans $]-1/d,1/d[$, on a l'égalité

$$\lim_{T\to+\infty} R^h_{2,f}(T,\phi) = \widehat{h^2}(0)\int_{Rr}\phi(x)r_2(GUE)(x)dx \tag{20}$$

avec $r_2(GUE)(x) = 1-(\frac{\sin\pi x}{\pi x})^2$. De plus si l'on admet HRG pour $L(f,s)$ on peut remplacer h par la fonction caractéristique de l'intervalle $[0,1]$.

En fait leur résultat est valable pour les distributions de corrélation supérieures $R^h_{k,f}(T,\phi)$ avec une condition similaire sur le support de la transformée de Fourier de ϕ. Grossièrement la méthode comporte une première étape combinatoire qui dans le cas $k=2$ revient simplement à évaluer le membre de gauche sans la contrainte $i\neq j$, puis à soustraire la diagonale qui vaut essentiellement $\phi(0)\widehat{h^2}(0)$. Dans la double somme, on sépare les variables dans le facteur $\phi(\frac{d}{2\pi}\log T(\gamma_i-\gamma_j))$ par transformée de Fourier, et on applique aux deux sommes résultantes la formule explicite pour se ramener à une double somme sur les nombres premiers p,p'. On montre ensuite que sous la contrainte $\mathrm{supp}(\hat{f})\subset]-1,1[$ seule la diagonale $p=p'$ fournit un terme principal provenant du pôle en 1 de la dérivée logarithmique $L'(f\times f,s)/L(f\times f,s)$, de la convolution de Rankin-Selberg de f avec elle même.

3.2. Distribution des "petits" zéros dans les familles

Le problème dual du précédent consiste à étudier les zéros de $L(f,s)$ au voisinage des *points critiques* [3] quand on fait varier certains des paramètres q_f ou $\mu_{f,i}$. Ici on se restreint au cas où les $\mu_{f,i}$ sont réels et≥ 0, il n'y a alors qu'un seul point critique $1/2$ (voir [P] pour l'étude des zéros des fonctions L de formes de Maass et de leur convolution de Rankin-Selberg pour le cas de points critiques non-réels). Dans ce cas on peut montrer sous HRG que le nombre de zéros de $L(f,s)$ à distance ≤ 1 de $1/2$ est

$$N(f,1) = \frac{\log(q_f \prod_i (1+\mu_{f,i}))}{\pi}(1+o(1)),$$

quand $Q_f := q_f \prod_i (1+\mu_{f,i}) \to +\infty$ (on appellera Q_f le conducteur analytique de $L(f,s)$); ainsi l'espacement moyen entre deux zéros est de l'ordre de $2\pi/\log(Q_f)$. On souhaite étudier la répartition locale des zéros dans un $1/\log Q_f$ voisinage du point critique $1/2$ et pour cela on peut former des distributions $R_{k,f}, W_{k,f}$ analogues à celles construites précédement. La plus simple est la distribution de répartition W que nous considèrerons dorénavant

$$W(f,\phi) := \sum_{\gamma_f} \phi(\frac{\log Q_f}{2\pi}\gamma_f)$$

pour ϕ lisse et dont la transformée de Fourier est à support compact. Notons que pour ϕ fixée la somme précédente n'a essentiellement qu'un nombre borné de termes quand $Q_f \to +\infty$, on est donc conduit à faire la moyenne de cette distribution sur une famille $\mathcal{F}$. Plus précisement, on considèrera des familles $\mathcal{F} = \bigcup_{Q>0} \mathcal{F}_Q$ qui sont réunions de sous familles $\mathcal{F}_Q$ indexées par des $Q>0$ telles que pour $f \in \mathcal{F}_Q$ on a $Q_f \approx Q$. Un paramètre important des familles $\mathcal{F}$ considérées est

$$\kappa := \kappa(\mathcal{F}) = \lim_{Q\to+\infty} \frac{\log|\mathcal{F}_Q|}{\log Q},$$

il mesure la taille de $\mathcal{F}_Q$ relativement au conducteur, et plus ce paramètre est grand plus le problème est facile.

On défini alors

$$W(\mathcal{F}_Q,\phi) = \frac{1}{|\mathcal{F}_Q|} \sum_{f\in\mathcal{F}_Q} W_Q(f,\phi)$$

où $W_Q(f,\phi)$ est défini comme $W(f,\phi)$ en remplaçant Q_f par Q. On étudie alors le comportement de $W(\mathcal{F}_Q,\phi)$ quand $Q\to+\infty$.

On donnera ci-dessous quelques exemples de familles considérées, les résultats que l'on obtient sont tous de la forme :

---

[3] Dans cet exposé, on appellera point critique l'intersection de $\Re e s = 1/2$ avec les droites horizontales portant les pôles de $L_\infty(f,s) = \prod_{i=1}^d \Gamma_{\mathbb{R}}(s+\mu_{f,i})$ autrement dit
les droites $\Im m s = -\Im m \mu_{f,i} \quad (i=1,\ldots,d)$.

Enoncé de Densité.—*Il existe une constante $v > 0$ telle que pour toute fonction ϕ lisse à décroissance rapide et dont la transformée de Fourier est à support compact dans l'intervalle $]-v,v[$, on a*

$$\lim_{Q\to+\infty} W(\mathcal{F}_Q,\phi) = W(G,\phi) = \int_{\mathbb{R}} W(G)(x)\phi(x)dx \tag{21}$$

où G représente l'une des cinq familles U, Sp, O, SO^+ ou SO^-.

Un fait remarquable, qui montre la nécessité de considérer le point critique est que si l'on considère la même question en un point non critique, on ne trouve que la distribution limite des groupes unitaire $W(U)$.

Enfin on fait des conjectures de la forme

Hypothèse de Densité.— *Le paramètre v peut être pris arbitrairement grand.*

Remarque 3.4. — Notons que pour l'énoncé de densité précédent la valeur $v = 1$ est critique. Pour le voir, on note que (par Parceval) $\int_{\mathbb{R}} W(G)(x)\phi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{W(G)}(x)\hat{\phi}(x)dx$, et pour $G = Sp, O, SO^+, SO^-$, $\widehat{W(G)}(x)$ admet une singularité en $x = \pm 1$ (voir (11)). Dans la pratique cette singularité se traduira par l'apparition d'un terme principal qui n'était pas présent avant de franchir ce cap. D'autre part, on voit que pour $G = O, SO^+, SO^-$ les distributions $W(G,\phi)$ coïncident pour les fonctions test ϕ dont la transformée de Fourier a son support contenu dansl'intervalle $]-1,1[$, ainsi pour pouvoir faire la distinction parmi l'un des types orthogonaux on doit utiliser les transformées de Fourier de support dépassant 1. Ainsi quand on parvient à obtenir l'énoncé type pour $v > 1$, on dira alors que le type de symétrie de $\mathcal{F}$ est U, Sp, O, SO^+ ou SO^- suivant le cas.

Bien entendu plus la valeur de v obtenue dans un énoncé de densité ci-dessus est grande, meilleur est le résultat; mais nn pratique la meilleure manière d'évaluer la qualité d'un tel énoncé est de considérer plutôt le quotient v/κ.

Parmi les familles qui ont été étudiées on trouve

• $\mathcal{F}_q^{\pm}$ la famille des caractères de Dirichlet primitifs de module q pairs (resp. impairs). Pour χ un caractère, la fonction $L(\chi,s) = \prod_p (1-\chi(p)p^{-s})^{-1}$ est de degré 1. De plus, on a $\mu_\chi = 0$ ou 1 suivant la parité de χ. On prend $Q = q$ et $\kappa = 1$. Sous HRG, on obtient la formule (21) pour tout $v < 2$ avec $G = U$.

les autres exemples qui suivent sont associés à des formes autoduales:

• $\mathcal{F}_D^{\pm}$ est l'ensemble des caractères primitifs quadratiques de module $\le D$ pairs (resp. impairs) : le signe de l'équation fonctionnelle est toujours 1 et on prend $Q = D$, et on a $\kappa = 1$. Sous HGR, on obtient la formule (21) avec $G = Sp$ pour tout $v < 2$ [OS].

L' exemple suivant est l'un de ceux traités par Iwaniec, Luo et Sarnak dans [ILS]. Il réalise les autres types de symétrie (O, SO^+, SO^-) considérés dans cet exposé.

• Pour $k \ge 2$ pair et $q \ge 1$ on note $S_k^p(q)$ l'ensemble des formes modulaires holomorphes primitives pour le groupe $\Gamma_0(q) \subset SL_2(\mathbb{Z})$. La fonction L d'une telle forme est définie à partir de son développement de Fourier à l'infini:

$$f(z)=\sum_{n\geq 1}\lambda_f(n)n^{\frac{k-1}{2}}e(nz),\ \text{tel que } L(f,s)=\sum_{n\geq 1}\frac{\lambda_f(n)}{n^s}=\prod_p(1-\frac{\lambda_f(p)}{p^s}+\frac{\varepsilon_q(p)}{p^{2s}})^{-1},$$

ε_q désignant de caractère trivial modulo q. Les paramètres à l'infini sont $\mu_1=(k-1)/2$, $\mu_2=(k+1)/2$ et $q_f=q$, ainsi $Q_f\approx qk^2$. Le signe de l'équation fonctionnelle vaut $\varepsilon_f=i^k w_f$ où w_f est la valeur propre de l'involution d'Atkin–Lehner $W_q=\begin{pmatrix}0 & -1\\ q & 0\end{pmatrix}$. Pour tout q sans facteur carré et $K\geq 2$, on note $S^{\pm}(K,q)$ l'ensemble des formes primitives f de poids $k\in[K,2K[$ et de niveau q telles que $\varepsilon_f=\pm 1$. Pour cette famille $Q\approx qK^2$ et on note $S^p(K,q)$ la réunion des deux familles. On a $|S^{\pm}(K,q)|\approx K^2\varphi(q)$ de sorte que $\kappa\sim 1$

Théorème 3.5 ([ILS]). — *On suppose l'hypothèse HRG vrai pour les fonctions $L(\chi,s)$ des caractères de Dirichlet, les fonctions $L(f,s)$ et les fonctions L des carrés symétriques $L(\mathrm{sym}^2 f,s)$, alors quand $qK\to+\infty$, q parcourant les entiers sans facteur carré, on a l'égalité (21) avec $v<2$ pour les familles $S^p(K,q)$, $S^+(K,q)$ et $S^-(K,q)$ avec $G=O$, SO^+, SO^- respectivement.*

Remarque 3.6. — Certaines hypothèses de Riemann sont moins importantes que d'autres : en utilisant la technique décrite par exemple dans [KM1] Sect. 3., on peut supprimer les HGR pour les $L(f,s)$ et les $L(\mathrm{sym}^2 f,s)$ au prix d'une légère hypothèse supplémentaire sur q :*il existe $\varepsilon>0$ tel que q n'a pas de facteur premier $\leq q^{\varepsilon}$*. Comme le remarquent les auteurs de [ILS], l'HRG pour les fonctions L de caractères de Dirichlet est apparemment nécessaire "pour briser la parité" ie. pour établir le résultat pour les sous-familles $S^+(K,q)$ et $S^-(K,q)$ avec $v>1$ et ainsi séparer les deux types de symétrie. En revanche si l'on ne considère que l'ensemble $S^*(K,q)$ cette HGR peut être supprimée au moins si q est fixé. Enfin pour $v<1$ l'énoncé précédent est completement inconditionnel: il permet au moins de distinguer les types orthogonaux des types unitaires et symplectiques.

E. Royer a établit une variante du Théorème 3.5: il considère pour k fixé et q sans facteurs carrés et n'ayant pas de petits facteurs p remiers, la même distribution $W(\mathcal{F},\phi)$ restreinte aux sous-familles de $S_k^p(q)$ dont on a imposé préalablement les valeurs propres des involutions d'Atkin–Lehner W_p pour tout p premier divisant q. Son résultat est que sous les HRG faites dans le Théorème 3.5, l'énoncé de densité est vérifié pour $v=2$ avec les types de symétrie SO^+ et SO^- suivant le signe de l'équation fonctionnelle $i^k w_f$ qui est fixe dans chacune de ces sous-famille.

On peut aussi considérer des familles telles que $\kappa<1$.

• De telles familles sont obtenues en prenant l'ensemble des formes modulaires primitives $S_k^p(q)$ avec k fixé et en associant à f, $L(\mathrm{sym}^2 f,s)$, la fonction L de son carré symétrique de f, ou bien $L(f\otimes g,s)$, la fonction L de la convolution de Rankin-Selberg de f avec une forme primitive autoduale fixée g de niveau premier à q. Pour ces familles on a $\kappa=1/2$.

On obtient dans le premier cas le type de symétrie Sp (cf [ILS] Thm. 1.4 et Remarks B et C) dans le second soit Sp soit SO^- suivant le signe de l'équation fonctionnelle (qui ne dépend que de q et de g).

• Un autre exemple de ce type a été considéré récemment par Fouvry et Iwaniec [FI] : soit K un corps quadratique imaginaire de discriminant $-D$, et soit $\mathcal{F}_D = \{\psi\}$ la famille des caractères du groupe des classes d'idéaux de O_K, les fonctions L définies par $L(\psi, s) = \sum_{\mathfrak{a}\subset O_K} \psi(\mathfrak{a})$ sont de degré 2 avec $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1$ et $q_\psi = D$. Sous HRG, pour les caractères de Dirichlet, les auteurs montrent l'égalité (21) pour $v = 1$ et $G = Sp$; ils montrent également qu'elle est vraie pour presque tout D, pourvu que $v < 4/3$. Pour cette famille $\log|\mathcal{F}_D| = \log h_K \sim 1/2 \log D$ et donc $\kappa = 1/2$.

Il n'est pas raisonnable d'essayer de décrire avec précision la preuve des résultats de [ILS]. Ceci dit elle suit le schéma général suivant:

— La première étape consiste à transformer les sommes sur les zéros $W(f, \phi)$ en somme sur les nombres premiers grâce aux formules explicites (18); intervertissant les sommations on est ramené à des moyennes de la forme

$$\frac{1}{|\mathcal{F}_Q|} \sum_{f\in\mathcal{F}_Q} \Lambda_f(p^\nu),\ p^\nu \leq Q^v. \tag{22}$$

— On analyse les moyennes (22) à l'aide une formule de "traces", propre à chaque famille[4], qui en général donne une expression plus "accessible" de la moyenne

$$\frac{1}{|\mathcal{F}_Q|} \sum_{f\in\mathcal{F}_Q} \lambda_f(n),$$

(d'autant plus "accéssible" que n est petit): pour les caractères de Dirichlet les relations d'orthogonalités jouent ce rôle; pour les familles des formes modulaires on utilise la formule des traces de Selberg ou la formule de Petersson (qui est en pratique plus éfficace):

Proposition 3.7 (Formule de Petersson). — *si $\mathcal{B}_k(q)$ est une base orthonormée de $S_k(q)$ on a*

$$\frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi)^{k-1}} \sum_{f\in\mathcal{B}} \lambda_f(m)\lambda_f(n) = \delta_{m,n} - 2\pi i^k \sum_{c\geq 1} \frac{S(m,n;cq)}{cq} J_{k-1}(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{cq})$$

où $\delta_{m,n}$ est le symbole de Kronecker et,

$$S(m,n;c) = \sum_{\substack{a \bmod c \\ (a,c)=1}} e\Big(\frac{ma + n\bar{a}}{c}\Big)$$

est la somme de Kloosterman, et $J_{k-1}(x)$ est la fonction de Bessel d'ordre $k-1$.

Quelques contorsions sont nécessaires pour passer d'une base orthonormée $\mathcal{B}_k(q)$ à l'ensemble des formes primitives $S_k^p(q)$ (il s'agit d'éliminer les formes anciennes ce qui

[4] pour les fonctions L sur les corps finis ce rôle est joué par la formule des traces de Lefschetz qui est implicite dans le Théorème d'équidistribution 2.3

est fait dans [ILS] par des arguments de crible qui sont simplifiés par le fait que q est sans facteur carré) ; appliquant la formule de Petersson, on trouve d'abord des termes principaux faciles à estimer (les termes dits diagonaux) qui fournissent une contribution principale. Les termes non-diagonaux se ramènent essentiellement à des sommes de la forme

$$T_1 = \sum_{k\in[K,2K[} \sum_c \frac{1}{cq} \sum_p \frac{\log p}{p^{1/2}\log R}\hat{\phi}(\frac{\log p}{\log R}) S(p,1;cq) i^k J_{k-1}(\frac{4\pi\sqrt{p}}{cq})$$

et

$$T_2^{\pm} = \pm \sum_{k\in[K,2K[} \sum_c \frac{1}{cq} \sum_p \frac{\log p}{p^{1/2}\log R}\hat{\phi}(\frac{\log p}{\log R}) \sqrt{q} S(pq,1;cq) J_{k-1}(\frac{4\pi\sqrt{pq}}{cq})$$

(quand q vaut 1 ou est premier on obtient exactement ces termes à des quantités négligeable près; le cas plus général où q est sans facteurs carrés est traité dans [ILS] au prix de grandes difficultés techniques et conduit à des sommes de ce type). On note que le second terme $T_2^{\pm}$ n'est présent que si l'on désire étudier les sous-familles $S^{\pm}(K,q)$. La majoration de Weil pour les sommes de Kloosterman montre que $T_1, T_2^{\pm}$ sont négligeables devant les termes diagonaux tant que $v < 1$. Quand $v > 1$ une analyse plus fine est nécessaire. On trouve que T_1 reste négligeable dans la zone $1 \leq v < 2$; le second terme $T_2^{\pm}$ en revanche n'est plus négligeable dans cette zone et fournit un nouveau terme principal (un terme hors-diagonal) qui est responsable de la discontinuité en 1 des densités $\widehat{W(SO^+)}(x)$ et $\widehat{W(SO^-)}(x)$ (en revanche $\widehat{W(O)(x)}$ n'a pas de discontinuité en 1). Heuristiquement, il n'est pas difficile de voir la différence de comportement de ces deux termes :

— Si K est fixé et q varie (rappelons qu'alors $Q \approx q$), le comportement de la fonction de Bessel $J_{k-1}(\frac{4\pi\sqrt{p}}{cq})$ et la condition $p < Q^v < q^2$ imposent à c de valoir essentiellement 1, le premier terme vaut donc essentiellement

$$T_1 \approx \sum_p \frac{\log p}{p^{1/2}\log R}\hat{\phi}(\frac{\log p}{\log R}) J_{k-1}(\frac{4\pi\sqrt{p}}{cq}) S(p,1;q).$$

On montre que les sommes de Kloosterman $S(p,1;q)$ sommées sur les p "oscillent" et donc que T_1 est négligeable (pour le voir, il suffit de sommer les nombres premiers p sur les classes de congruences modulo q, ce qui requiert HRG pour les caractères de Dirichlet). Dans T_2, la somme de Kloosterman $S(p,1;q)$ est remplacée par $\sqrt{q}S(pq,1;q) = \sqrt{q}S(0,1;q) = \sqrt{q}\mu(q)$ qui est constante; il n'y a ici pas d'oscillation possible et on trouve un nouveau terme principal.

— Quand q est fixé (disons $q = 1$) et que l'on somme sur les poids $k \in [K, 2K[$ pairs ($Q \approx K^2$), la différence de comportement entre T_1 et $T_2^{\pm}$ est expliquée par la différence entre les deux formules sommatoires suivantes pour les séries de Neumann:

Lemme 3.8 ([ILS] Cor. 8.2). — Soit h lisse à support compact dans $\mathbb{R}_{>0}$, on a

$$2\sum_{k\equiv 0(2)} i^k h(\frac{k-1}{K}) J_{k-1}(x) = -\frac{K}{\sqrt{x}} \Im m(\zeta_8 e^{ix} \tilde{h}(\frac{K^2}{2x})) + O(x/K^4), \tag{23}$$

$$2\sum_{k\equiv 0(2)} h(\frac{k-1}{K})J_{k-1}(x) = h(\frac{x}{K}) + O(\frac{x}{K^3}),$$

avec

$$\tilde{h}(x) = \int_{\mathbb{R}>0} \frac{h(\sqrt{u})}{\sqrt{2\pi u}} e^{iux} du$$

La première formule sommatoire correspond essentiellement à T_1 : puisque h est lisse et à support compact, le terme oscillant principal

$$-\frac{K}{\sqrt{x}}\Im m(\zeta_8 e^{ix}\tilde{h}(\frac{K^2}{2x})) \tag{24}$$

est très petit tant que $x \ll K^2$, et dans notre cas cela se traduit par la condition $\sqrt{p} < K^2$: $v < 2$ (incidemment cela indique que $v = 2$ est une autre barrière naturelle au delà de laquelle un nouveau phénomène devrait apparaître.)

La deuxième formule sommatoire correspond à $T_2^{\pm}$: on a cette fois-ci un terme principal $h(x/K)$ qui fait que $T_2\pm$ s'écrit comme somme d'un terme principal et d'un terme d'erreur qui est bien controlé dès que $v < 3$.

3.3. Au dela de 2κ, l'Hypothèse de Riemann

La preuve du Théorème 0.4 vient du fait remarqué par Iwaniec, Luo et Sarnak que la valeur $v = 2\kappa$ est une valeur critique: supposons donné une famille $\mathcal{F} = \cup_{Q>0}\mathcal{F}_Q$ et supposons que pour tout $f \in \mathcal{F}$ les zéros de $L(f,s)$ sont tous réels ou situés sur la droite $\Re es = 1/2$. On considère (une version lisse de) la fonction test $\phi_v(x) = (\frac{\sin \pi v x}{\pi v x})^2$; sa transformée de fourier $\hat{\phi}_v(x) = \max(0, \frac{1}{v}(1 - \frac{|x|}{v}))$ est à support dans $[-v, v]$. Alors l'égalité (21) donne

$$\frac{1}{|\mathcal{F}_Q|}\sum_{f\in\mathcal{F}_Q}\sum_{\gamma_f}(\frac{\sin(v\log Q\gamma_f/2)}{(v\log Q\gamma_f/2)})^2 = W(G,\phi_v)(1+o(1)).$$

Sous l'hypothèse que γ_f est réel ou imaginaire pur, chaque terme du membre de gauche est positif ou nul. On a donc pour chaque $f \in \mathcal{F}_Q$ la majoration

$$(\frac{\sin(v\log Q\gamma_f/2)}{(v\log Q\gamma_f/2)})^2 \ll |\mathcal{F}_Q| \ll_\varepsilon Q^{(\kappa+\varepsilon)v}$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Si $\rho_f = 1/2 + i\gamma_f$ est réel cela implique que

$$\rho_f \leq 1/2 + \kappa/v + \varepsilon$$

pour tout $\varepsilon > 0$, d'ou l'intéret de pouvoir prendre $v > 2\kappa$.

Nous pouvons passer à la preuve du Théorème 0.4. Quand q est fixé ($q = 1$) et $K \to +\infty$, on peut montrer que (21) est valide *sans aucune hypothèse supplémentaire* pour la famille $S^p(K,1)$ pour $G = O$ et pour tout $v < 2 = 2\kappa$. Motivés par le franchissement de cette barrière, les auteurs de [ILS] ont montré que l'hypothèse S avec $\alpha < 3/4$ suffit pour pouvoir prendre $v > 2$. Le sel de leur preuve se trouve dans le terme principal (24) de (23) : ce terme est non-nul dès que $v > 2$ mais puisque $\widehat{W(G)}(x)$ n'a pas de singularité en 2, le terme T_1 doit rester négligeable, c'est à dire que le terme provenant de (24) devrait osciller. C'est précisement ce qu'assure l'hypothèse S pour $\alpha < 3/4$. L'appendice C de [ILS] contient une discussion critique et détaillée sur la validité de l'Hypothèse S (rappelons que HRG pour les caractères de Dirichlet ne fournit apparemment cette hypothèse que pour $\alpha = 3/4$). Il y est notamment expliqué de quelle manière elle découle d'une Hypothèse (notée A) très naturelle (et certainement très difficile à démontrer) sur le caractère aléatoire des oscillations de la fonction de Möbius μ. Ils montrent également qu'une variante très proche de l'hypothèse S devient fausse si on croit à la variante de l'hypothèse A correspondante.

3.4. **Application au rang analytique**

Pour $f \in \mathcal{F}$, on note $r_f = \mathrm{ord}_{s=1/2} L(f,s)$ le rang analytique de f (cette terminologie est motivée par la conjecture de Birch–Swinnerton-Dyer) et on souhaite analyser le rang analytique moyen

$$r(\mathcal{F}_Q) = \frac{1}{|\mathcal{F}_Q|} \sum_{f \in \mathcal{F}_Q} r_f = \sum_{r=0}^{+\infty} r p(\mathcal{F}_Q, r),$$

avec

$$p(\mathcal{F}_Q, r) = \frac{|f \in \mathcal{F}_Q,\ r_f = r|}{|\mathcal{F}_Q|} \tag{25}$$

est la proportion des fonctions L de $\mathcal{F}_Q$ de rang analytique égal à r. Par l'analogie entre les fonctions L et les polynômes de matrices aléatoires, on est amené à conjecturer

Hypothèse du rang. —*On a* $\lim_{Q\to+\infty} r(\mathcal{F}_Q) = 1/2,\ 1$ *ou* 0 *suivant que* $\mathcal{F}$ *a pour type de symétrie* O, SO^- *ou* U, Sp, SO^+. *Plus précisement* $\lim_{Q\to+\infty} p(\mathcal{F}_Q, r) = 0$ *pour tout* $r \geq 2$*;* $\lim_{Q\to+\infty} p(\mathcal{F}_Q, 0) = 1 - \lim_{Q\to+\infty} p(\mathcal{F}_Q, 1) = 1/2, 0$ *ou* 1 *suivant que* $\mathcal{F}$ *a pour type de symétrie* O, SO^- *ou* U, Sp, SO^+.

Cette conjecture très naturelle regroupe toute les conjectures connues sur le rang moyen des fonctions L, notamment celles de Brumer [Br], Goldfeld et Murty [Mu]. D'autre part il n'est pas difficile de voir que l'Hypothèse de Densité l'implique, si l'on admet HRG pour les fonctions $L(f,s)$ de $\mathcal{F}$ (il suffit de choisir la fonction $\phi = \phi_v$ ci-dessus). D'autre part tout énoncé de densité de type (21) fournit des résultats partiels en direction de l'hypothèse du rang: une majoration de $r(\mathcal{F}_Q)$ et des minorations de $p(\mathcal{F}_Q, 0)$ et (ou éventuellement de $p(\mathcal{F}_Q, 1)$ si $G = SO^-$). Ainsi dans [ILS], les résultats (avec $v = 2$) du Théorème 3.5 fournissent pour la famille $S_2^p(q)$, la majoration $r(S_2^p(q)) \leq 1 + o(1)$; d'autre part les auteurs montrent qu'en exploitant la différence de distribution entre $S_2^+(q)$ et $S_2^-(q)$ on peut améliorer cette borne et passer sous la barrière 1 (toujours avec $v = 2$):

$$r(S_2^p(q)) \leq 99/100 + o(1). \tag{26}$$

Cette majoration jointe à la conjecture de Birch–Swinnerton-Dyer donne une majoration du rang de la partie nouvelle de la jacobienne de la courbe modulaire $X_0(q)$.

3.5. **Les moments des fonctions L**

Le modèle des matrices aléatoires jette un nouvel éclairage sur un thème classique de la théorie analytique des nombres: l'évaluation des moments des fonctions L au point critique. Les moments sont définis (pour 1/2 point critique) par

$$M_k(\mathcal{F}_Q) = \frac{1}{|\mathcal{F}_Q|} \sum_f L(f, 1/2)^k$$

si tous les éléments de $\mathcal{F}$ sont autoduaux, sinon on remplace $L(f, 1/2)^k$ par $|L(f, 1/2)|^k$ dans l'expression précédente. Si $\mathcal{F}$ a pour type de symétrie G, on modélise $L(f, s)$ par une matrice alétoire de rang $N = [\frac{\log Q}{2\pi}]$, les calculs de la section1.3, ont conduit Conrey–Farmer [CF] et Keating–Snaith [KSn1, KSn2] à la conjecture

Hypothèse des moments.— *Si $\mathcal{F}$ a pour type de symétrie G, on a*

$$\lim_{Q\to+\infty} M_k(\mathcal{F}_Q) = a_k(\mathcal{F}) g_G(k) (\frac{\log Q}{2\pi})^{\gamma_G(k)}$$

où $g_G(k)$ est la constante explicitée au théorème 1.3, $\gamma_G(k)$ est l'exposant de N correspondant

$$\gamma_U(k) = (k/2)^2, \quad \gamma_{Sp}(k) = k(k+1)/2,$$

$$\gamma_O(k) = \gamma_{SO^+}(k) = k(k-1)/2, \quad \gamma_{SO^-}(k) = k(k+1)/2,$$

et $a_k(\mathcal{F})$ est une constante de nature arithmétique dépendant de la famille que l'on peut calculer explicitement pour chaque cas.

Remarque 3.9. — Pour cette hypothèse, la seule quantité qui n'est pas explicitement définie est la constante $a_k(\mathcal{F})$. Elle peut être calculée explicitement pour chaque famille étudiée et pour chaque k et on trouve à chaque fois un produit eulérien absolument convergent, mais on ne dispose pas pour l'instant d'une définition intrisèque de cette quantité. Il est possible qu'elle soit liée aux moments de la variable alétoire (cf. (17))

$$f \to \Lambda(f, 0) \exp(\frac{\Lambda'(f, 0)}{\Lambda(f, 0)} \frac{1}{2}) = \varepsilon_f \Lambda(\overline{f}, 1) \exp(-\frac{\Lambda'(\overline{f}, 1)}{\Lambda(\overline{f}, 1)} \frac{1}{2})$$

qui eux peuvent tous être évalués par des techniques liées au grand crible.

Il est assez remarquable que cette conjecture n'a toujours pas encore été prise en défaut. Cependant très peu de moments d'ordre élevé sont connus à ce jour et aucun d'ordre $> 4\kappa$

: on peut citer les moments de

$$\{\zeta(1/2+it)\}_{t\leq T},\ k=2,4,\ G=U \text{ (Ingham)},$$
$$\{L(\chi,1/2)\}_{\chi(q)},\ \chi \text{ primitif complexe},\ k=2,4,\ G=U \text{ [HB]},$$
$$\{L(\chi,1/2)\}_{\chi(D)}, \chi \text{ primitif réel } k=1,2,3,\ G=Sp,\ \text{[So]}$$
$$\{L(f,1/2)\}_{f\in S_k^p(q)},\ q \text{ premier},\ k=1,2,3,4,\ G=SO^+,\ \text{[KMV3]},$$
$$\{L(f\otimes\chi,1/2)\}_{f\in S_k^p(q)},\ q \text{ premier}, \chi \text{ un caractère complexe fixé},\ k=2,4\ G=U \text{ [MV]},$$
$$\{L(\psi,1/2)\}_{\psi\in\widehat{h_K}},\ K=\mathbb{Q}(\sqrt{-D}),\ k=1,2\ G=Sp,\ \text{[DFI3]}.$$

L'évaluation des moments est assez similaire à l'évaluation des distributions de densité $W(\mathcal{F}_Q,\phi)$.

— L'analogue de la formule explicite (Prop. 3.1) est donnée par une formule représentant $L(f,1/2)$ sous la forme d'une série rapidement convergente: par exemple pour f autoduale, on a

$$L(f,1/2)=(1+\varepsilon_f)\sum_{n\geq 1}\frac{\lambda_f(n)}{n^{1/2}}V(n)$$

avec

$$V(y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(2)}\frac{L_\infty(f,s+1/2)}{L_\infty(f,1/2)}(y/q_f^{1/2})^{-s}\frac{ds}{s}.$$

Cette fonction est à décroissante rapide dès que $y\gg Q_f^{1/2}\approx Q^{1/2}$. Plus généralement on voit que $L(f,1/2)^k$ peut se représenter comme une série rapidement convergente de la forme

$$(1+\varepsilon_f)\sum_{n\geq 1}\frac{\lambda_{f_k}(n)}{n^{1/2}}V_k(n)$$

où

$$V(y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(2)}\Big(\frac{L_\infty(f,s+1/2)}{L_\infty(f,1/2)}\Big)^k(y/q_f^{k/2})^{-s}\frac{ds}{s}$$

est à décroissance rapide pour $y\gg Q_f^{k/2}\approx Q^{k/2}$ et $\lambda_{f_k}(n)=\sum_{n_1\dots n_k=n}\lambda_f(n_1)\dots\lambda_f(n_k)$ est la convolution de λ_f avec elle-même k fois (dans la pratique cette fonction arithmétique multiplicative vaut "essentiellement" $\lambda_f(n)\tau_k(n)$ où $\tau_k(n)=\sum_{n_1\dots n_k=n}1$ compte le nombre de représentation de n en produit de k entiers).

— Ensuite les moyennes

$$\frac{1}{|\mathcal{F}_Q|}\sum_f\lambda_{f_k}(n),\ n\ll Q^{k/2+\varepsilon}$$

analogues aux moyennes (22) sont évaluées l'aide d'une formule de traces (après des arguments combinatoires qui peuvent tre compliqués si $d>1$) ainsi le paramètre v dans section précédente correspond au paramètre $k/2$. Comme dans la section précédente des termes non-diagonaux apparaissent quand k augmente, ainsi les premiers termes non-diagonaux apparaissent pour $k/2=\kappa$ et le moment d'ordre $k=4\kappa$ voit apparaître des termes hors diagonaux supplémentaires fort délicats à estimer (cf [DFI3], [KMV2] par exemple). La grande différence avec la section précédente est que l'évaluation des termes non-diagonaux supplémentaires est possible incoditionnellement (sans avoir recours à HGR), la raison étant que la fonction arithmétique $\tau_k(n)$ se contrôle bien mieux que la fonction caractéristique des nombres premiers.

L'Hypothèse des moments est un outil très puissant pour prédire le comportement en moyenne des fonctions L. En effet le Théorème de la section 1.3 permet d'étudier le comportement des variables aléatoires $A \to \frac{\log|\det(1-A)|}{\log N}$, $A \to \det(1-A)$ quand $N \to +\infty$ (notons que la deuxième variable n'admet pas de distribution limite). De là, on peut extrapoler aux valeurs critiques de fonctions L avec l'identification $N = \log Q/2\pi$ et faire des conjectures très fines sur ces valeurs critiques. Par exemple utilisant ce modèle Conrey, Keating, Rubinstein et Snaith font des conjectures très précises sur la fréquence *d'annulation* en $1/2$ des twists quadratiques de la fonction L d'une courbe elliptique. Si E est une courbe elliptique, pour tout p premier on note $E \otimes \chi_p$ le twist de E par p, alors la famille $\{L(E\otimes\chi_p, s)\}_{p\leq X}$ est de type O et se scinde en deux sous-classes de type SO^+ et SO^+ indexées par les p tels que $\varepsilon_{E\otimes\chi_p} = 1$, l'hypothèse du rang donne ici que

$$|\{p \leq X,\ \varepsilon_{E\otimes\chi_p} = 1,\ L(E\otimes\chi_p, 1/2) \neq 0\}| = \frac{1}{2}|\{p \leq X\ \varepsilon_{E\otimes\chi_p} = 1\}|(1+o(1)),\ X \to +\infty.$$

l La conjecture suivante raffine l'hypothèse en prédisant la taille de l'ensemble exceptionnel complémentaire

Conjecture 3.10 (CKRS). — *Soit $E/\mathbb{Q}$ une courbe elliptique, il existe une constante $c_E > 0$ telle que*

$$|\{p \leq X,\ \varepsilon_{E\otimes\chi_p} = 1,\ L(E\otimes\chi_p, 1/2) = 0\}| \simeq c_E X^{3/4}(\log X)^{-5/8}.$$

Leur heuristique consiste à combiner le modèle des matrices aléatoires et la formule de Waldspurger liant la valeur centrale des tordues quadratiques des fonctions L au carré des coéfficients de Fourier des formes modulaires de poids demi-entier [Wa]: cette formule implique que $p \to \sqrt{p}L(E\otimes\chi_p, 1/2)$ prend des valeurs entières (à une constante multiplicative fixée près).

4. EPILOGUE: METHODES INCONDITIONNELLES

Au cours de cet exposé nous avons évoqué un grand nombre de conjectures et autres hypothèses toutes certainement très difficiles. Dans cette dernière section nous voulons rappeler que des méthodes existent pour montrer inconditionellement certaines conséquences de ces hypothèses.

Ainsi, le problème d'évaluer les moments des fonctions L(qui très antérieur à l'arrivée des matrices aléatoires en théorie des nombres) est lié à tout un ensemble de techniques permettant de trouver des substituts efficaces aux hypothèses de Riemann.

Ces méthodes sont liées à l'évaluation des moments "partiels"

$$M(\mathcal{F}, \mathbf{x}, s) := \frac{1}{|\mathcal{F}|} \sum_f L(f, s) M(f, s)$$

ou

$$M_k(\mathcal{F}, \mathbf{x}, s) := \frac{1}{|\mathcal{F}|} \sum_f |L(f, s)|^k |M(f, s)|^2 \tag{27}$$

où s est dans la bande critique, $\mathbf{x} = (x_l)_{l \leq L} \in \mathbb{C}^L$ et $M(f, s)$ est le polynôme de Dirichlet

$$M(f, s) = \sum_{\ell \leq L} x_l \frac{\lambda_f(l)}{l^s}, \; x_l \in \mathbb{C}. \tag{28}$$

En pratique on choisira les coefficient x_l de manière appropriée suivant le type d'application qu'on a en vue. Un paramètre important du polynôme est sa longueur L et on la mesure en général à travers le coefficient $\Delta = \log L / \log Q$ (la qualité des résultats obtenus en est une fonction croissante).

Il y a essentiellement deux types d'utilisation de ce polynôme que nous allons évoquer à travers des exemples : la mollification et l'amplification

4.1. La mollification : Sur les zéros réels des fonctions L

La mollification est une technique inventée par Bohr et Landau au début du siècle dernier. Ils l'utilisèrent pour étudier la répartition des zéros de la fonction ζ sur la droite critique. On pourra se reporter à l'exposé de Bombieri de ce séminaire pour une description détaillée des techniques de mollification dans le contexte de ζ.

Une première application possible de la méthode de mollification est l'obtention de minorations non triviales pour la proportion $p(\mathcal{F}_Q, 0)$ des fonctions L de $\mathcal{F}_Q$ qui ne s'annulent pas au point critique $1/2$ (cf (25)).

Le principe général est le suivant: on part de la minoration (pour $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^L$ non nul) et Q assez grand $p(\mathcal{F}_Q, 0) \geq |M(\mathcal{F}_Q, \mathbf{x}, 1/2)|^2 / M_2(\mathcal{F}_Q, \mathbf{x}, 1/2)$; On utilise les formules de traces permettent d'obtenir des formules asymptotiques pour les quantités $M(\mathcal{F}_Q, \mathbf{x}, 1/2)$ et $M_2(\mathcal{F}_Q, \mathbf{x}, 1/2)$. On montre alors que le vecteur $\mathbf{x}$ peut être choisit de manière "optimale" (afin de minimiser la forme quadratique $M_2(\mathcal{F}_Q, \mathbf{x}, 1/2)$ sous la contrainte linéaire $M(\mathcal{F}_Q, \mathbf{x}, 1/2) = 1$); avec de choix, on obtient

$$p(\mathcal{F}_Q, 0) \geq F_G(\Delta)(1 + o(1)), \; Q \to +\infty \tag{29}$$

où $F_G(\Delta)$ est une fraction à coefficients rationnels nulle pour $\Delta = 0$, strictement croissante et qui ne dépend que du type de symétrie G de la famille (on pourra consulter [IS1, So, KMV1] pour une application de ce principe pour diverses familles).

Notons que si l'on choisit le mollifieur "trivial" $M(f, s) = 1$ on n'obtient une minoration plus faible de la forme (cf. l'Hypothèse des Moments) $p(\mathcal{F}_Q, 0) \gg 1/\log Q \to 0, \; Q \to +\infty$ (cf. [Du]).

Remarque 4.1. — Les familles de fonctions L que nous avons rencontrées jusquà présent sont toutes relativement classiques. Pourtant on pourrait imaginer étudier le même type de problème pour d'autre types de fonctions L, ainsi celles de formes automorphes sur des corps de nombres autres que $\mathbb{Q}$. La principale limitation à l'extension de ces résultats tient au fait que les formules de traces dont on dispose dans le cas non classique (formules d'Arthur-Selberg) sont beaucoup moins maniables du point de vue analytique. Récemment Vanderkam [Va] a montré que l'on peut utiliser la formule des traces de Selberg (sous la forme explicite qu'a donné Shimizu) pour étendre (29) (et (30) (31) ci-dessous) aux familles de formes modulaires de Hilbert sur un corps totalement réel, quand le poids est fixé et le niveau varie.

Une deuxième application possible concerne l'étude des zéros non-triviaux réels des fonctions L d'une famille $\mathcal{F}$. Pour f appartenant à $\mathcal{F}$, on note $N(f,[0,1])$ le nombre de zéros réels contenus dans la bande critique de la fonction $L(f,s)$ comptés avec multiplicité et $N(\mathcal{F}_Q,[0,1])$ la valeur moyenne de cette variable aléatoire. Il est facile de prédire le comportement de $N(\mathcal{F}_Q,[0,1])$ quand $Q \to +\infty$: on note que la majoration triviale $N(\mathcal{F}_Q,[0,1]) \geq r(\mathcal{F}_Q)$ est une égalité sous HRG; d'autre part l'hypothèse du rang prédit la limite $\lim_{Q\to+\infty} r(\mathcal{F}_Q)$ en fonction du type de symétrie de $\mathcal{F}$; on peut noter que pour la famille $\{\chi\}$ des caractères de Dirichlet (qui est de type unitaire), Chowla avait déjà fait la conjecture plus forte $N(\mathcal{F}_Q,[0,1]) = 0$!

Les méthodes de mollification permettent d'obtenir de résultats non-triviaux et inconditionnels sur les quantités $N(\mathcal{F}_Q,[0,1])$ et $r(\mathcal{F}_Q)$. Ainsi dans [KM1], il était montré comment les formules explicites combinées avec une ancienne technique de mollification due à Selberg [Se], permettent d'obtenir la majoration

$$N(S_2^p(q),[0,1]) \leq C \tag{30}$$

au moins pour q premier avec C une constante absolue (dans [KM1], la majoration était donné pour le rang analytique $r(S_2^p(q))$ mais la méthode utilisée fournit en fait la majoration plus forte). il s'agissait alors du premier résultat inconditionnel de ce type.

Cette méthode qui fonctionne *mutatis mutandis* pour une grande classe de familles de fonction L, a été raffinée pour fournir la majoration beaucoup plus forte

$$\frac{1}{|\mathcal{F}_Q|}\sum_{f\in\mathcal{F}_Q} \exp(AN(f,[0,1])) \leq C \tag{31}$$

où $A>0$ et C sont des constantes qui ne dépendent que de la famille $\mathcal{F}$ ([HM], là encore l'inégalité n'est donnée que pour le rang analytique mais elle est vraie en général): cette majoration dit que la proportion des éléments $L(f,s)$ de la famille ayant au moins r zéros sur $[0,1]$ décroit exponentiellement vite avec r. Cette majoration combinée avec des minorations du type (29) obtenues comme ci-dessus conduit à une version inconditionnelle de l'inégalité (26) ([KMV1]) : pour q premier

$$r(S_2(q)) \leq (1.2 + o(1)).$$

Dans [CS], cette technique a été considérablement simplifiée, améliorée et optimisée par Conrey et Soundararajan afin d'obtenir des formes précises de la majoration (30): leur Théorème 0.5 est conséquence de l'inégalité

$$N(\mathcal{F}_D, [0,1]) \leq 0.79 + o(1) \qquad (D \to +\infty). \tag{32}$$

Le point clef étant que $0.79 < 1$.

Pour obtenir (30), (31), ou (32), la méthode consiste à majorer le nombre de zéros positifs ou nuls par le nombre de ceux contenus dans un $1/\log Q$-voisinage du demi-axe $[0, +\infty[$. d'après l'équation fonctionnelle on peut se limiter à un $1/\log Q$-voisinage du demi-axe $[1/2, +\infty[$. Pour compter les zéros dans ce voisinage, on utilise le lemme suivant dû à Selberg qui permet de compter les zéros dans des bandes étroites [Se] (Lemma 14)

Lemme 4.2 (Selberg). — Soit h une fonction holomorphe dans le domaine

$$\{s \in \mathbb{C} \mid \Re es \geq \alpha,\ t_1 \leq \Im ms \leq t_2\}$$

telle que

$$h(s) = 1 + o\Big(\exp(-\frac{\pi}{t_2 - t_1}\Re es\Big) \tag{33}$$

uniformément dans ce domaine quand $\Re es \to +\infty$. Soient $\rho = \beta + i\gamma$ les zéros de h dans l'intérieur de ce domaine. On a l'égalité

$$2(t_2 - t_1)\sum_\rho \sin\Big(\pi\frac{\gamma - t_1}{t_2 - t_1}\Big)\sinh\Big(\pi\frac{\beta - \alpha}{t_2 - t_1}\Big) = \int_{t_1}^{t_2} \sin\Big(\pi\frac{t - t_1}{t_2 - t_1}\Big)\log|h(\alpha + it)|dt \tag{34}$$
$$+ \int_\alpha^{+\infty} \sinh\Big(\pi\frac{\sigma - \alpha}{t_2 - t_1}\Big)(\log|h(\sigma + it_1)| + \log|h(\sigma + it_2)|)d\sigma$$

Dans leur preuve Conrey et Soundararajan, choisissent $\alpha = 1/2 - a/\log D$, $t_1 = -b/\log D$, $t_2 = b/\log D$ où a, b sont des paramètres à optimiser. Ainsi dans la somme de gauche ci-dessus, les zéros du demi-axe $[1/2, +\infty[$ sont comptés avec le poids

$$\frac{4b}{\log D}\sinh\Big(\pi\frac{(\beta - 1/2)\log D}{2}\Big) \geq \frac{4b}{\log D}\sinh\Big(\pi\frac{a}{2b}\Big).$$

On voudrait appliquer le lemme 4.2 à $h(s) = \prod_{\chi\in\mathcal{F}_D} L(\chi, s)$ mais l'hypothèse de décroissance rapide à l'infini (33) n'est pas valable pour cette fonction. La méthode de mollification intervient à ce niveau : on considère plutôt une fonction de la forme $h(s) = \prod_{\chi\in\mathcal{F}_D} L(\chi, s)M(\chi, s)$ (ce qui ne fait qu'augmenter le nombre de zéros). On prend pour $M(\chi, s)$ une version tronquée de $L(\chi, s)^{-1}$ (un mollifieur) de la forme (28)avec

$$x_l = \mu(l), \quad 1 \leq l \leq L^{1-\delta}, \quad x_l = \mu(l)P(\log(L/l)/\log L), \quad L^{1-\delta} \leq l \leq L$$

où $0 < \delta < 1$ et P est un certain polynôme tel que $P(0) = P'(0) = 0$, $P(\delta) = 1$, $P'(\delta) = 0$. Par construction on a pour $\Re es > 2$

$$h(s) = \prod_{\chi\in\mathcal{F}_D}(1 + \sum_{n \geq L^{1-\delta}} \frac{a_\chi(n)}{n^s}),$$

ainsi si le produit $(1-\delta)\Delta$ est suffisament grand par rapport à b, l'hypothèse (33) est vérifiée. Appliquant le Lemme 4.2, on est ramené au problème de majorer $\log|h(s)|$ le long du contour

$$[\alpha+it_1,+\infty+it_1[\cup[\alpha+it_1,\alpha+it_2[\cup[\alpha+it_2,+\infty+it_2[.$$

On se ramène au moment partiel $M_2(\mathcal{F}_D,\mathbf{x},s)$ par l'inégalité arithmetico-géométrique

$$\frac{1}{|\mathcal{F}_D|}\log|h(s)|\leq\frac{1}{2}\log(M_2(\mathcal{F}_D,\mathbf{x},s)).$$

Le point technique de la preuve est l'évaluation de $M_2(\mathcal{F}_D,\mathbf{x},s)$. Pour cette famille, elle est faite à l'aide de techniques développées dans [So] et fournit la formule asymptotique suivante qui est uniforme (au moins) pour $1/\log D\ll|s|\ll\log\log D/\log D$

$$M_2(\mathcal{F}_D,\mathbf{x},1/2+s)\sim 1+\Big(\frac{1-D^{-2\Re es}}{2\Re es\log L}+\frac{D^{-s}-D^{-\overline{s}}}{2\Im ms\log L}\Big)$$
$$+\int_0^\delta L^{-2\Re es(1-y)}\Big(P'(y)+\frac{P''(y)}{2s\log L}\Big)\Big(P'(y)+\frac{P''(y)}{2\overline{s}\log L}\Big)dy.$$

ce qui permet de majorer l'intégrale (34). Pour conclure la preuve, il reste à optimiser les valeurs des paramètres a,b,δ,P et Δ. Les auteurs choisissent $a=6.8$ $b=\pi/(2(1-\delta))$, $\delta=0.64$, $P(y)=3(y/\delta)^2-2(y/\delta)^3$ et on peut prendre Δ arbitrairement proche de $1/2$.

Remarque 4.3. — Du point de vue du comptage des zéros la méthode suivie n'est pas optimale en apparence: premièrement on compte les zéros éventuels des mollifieurs $M(\chi,s)$; deuxièmement, on compte les zéros contenus dans un $1/\log D$ voisinage de $[1/2,+\infty[$: ainsi même si on croit à l'Hypothèse de Riemann Généralisée, on n'évitera jamais, en suivant cette méthode, le comptage des zéros des fonctions $L(\chi,s)$ qui se trouvent sur le segment $[1/2-ib/\log D,1/2+ib/\log D]$. Le modèle des matrices aléatoire intervient sur ce dernier point: d'après ce modèle, la famille $\mathcal{F}_D$ étant de type symplectique, ses fonctions L ne devraient pas "en général" avoir beaucoup de zéros proches de $1/2$ (cf. la Remarque 1.2), ainsi, par la technique utilisée, on ne devrait pas compter trop de zéros supplémentaires. C'est cette constatation qui est à l'origine du travail de Conrey-Soundararajan. Pour la même raison il est raisonnable d'espérer que les fonctions $L(f,s)$ pour $f\in S_k^-(q)$ n'ont pas de zéros proches de $1/2$ autres que le zéro trivial $1/2$ puisque le type de symétrie de cette famille est SO^- et que les distributions locales au voisinage de 1 des valeurs propres de matrices symplectiques et des des valeurs propres non triviales de matrices orthogonales de rang impair coincident (cf. la Remarque 1.2). Il est donc raisonnable d'espérer montrer qu'il y a une proportion positive des formes modulaires impaires qui ont exactement 1 zéro sur l'axe r'eel. En revanche, pour les caractères complexes (ayant une symétrie de type unitaire) ou pour les formes modulaires paires (ayant symétrie de type orthogonal pair) il peut y avoir des zéros très proches de $1/2$, et il est vraisemblable qu'on ne pourra pas obtenir une proportion positive de fonctions L ne s'annulant pas sur $[0,1]$.

4.2. **Briser la convexité**

Une autre application de l'évaluation des moments est le problème de majorer $|L(f,1/2)|$ en fonction de Q_f. Rappelons que l' Hypothèse HRG implique l'
HYPOTHÈSE DE LINDELÖF GÉNÉRALISÉE (HLG):*Pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$|L(f,1/2)| \ll_{\varepsilon,d} Q_f^{\varepsilon}, \tag{35}$$

la constante impliquée ne dépendant que de ε et de d.

D'autre part l'équation fonctionnelle (16) et le principe de convexité de Phragmen-Lindelöf permettent de montrer la majoration (35) avec l'exposant ε remplacé par $1/4+\varepsilon$ (qu'on appelle exposant de convexité).

Un premier pas vers HGL consisterait à obtenir la majoration (35) avec un exposant $< 1/4$ (problème qu'on appellera QUASI-HLG). Il est remarquable que la résolution de quasi-HGL est suffisante pour résoudre complètement des problèmes profonds: pour des applications frappantes, on pourra se reporter à l'excellent survol [IS2].

Pour améliorer l'exposant de convexité, la méthode des moments est assez bien adaptée: si f fait partie d'une famille $\mathcal{F}_Q$ et qu'on dispose de l'hypothèse des moments pour le k-ième moment, on a trivialement

$$|L(f,1/2)| \leq (|\mathcal{F}_Q| M_k(\mathcal{F}_Q))^{1/k} \ll_\varepsilon Q^{\kappa/k+\varepsilon}.$$

Ainsi l'Hypothèse des Moments implique trivialement HLG. Pour ce qui est de quasi-HLG, on voit que le moment d'ordre $k = 4\kappa$ est critique, puisqu'il fournit l'exposant de convexité $1/4+\varepsilon$ (tout comme $v = 2\kappa$ était critique pour quasi-HRG). Notons qu'en pratique on n'utilise la méthode des moments que pour les moments d'ordre pair sauf si l'on sait *a priori* que les $L(f,1/2)$ sont positifs ou nuls (c'est un résultat profond qui a été montré pour certaines fonction L de formes autoduales [GZ, Wa]). Souvent, on obtient une majoration correcte du moment d'ordre $k = 4\kappa$ assez naturellement (par une inégalité de grand crible) et pour le dépasser on a plusieurs possibilités:

- la première consiste à réduire la taille de la famille (plus précisement réduire κ) tout en conservant la même qualité d'estimation pour le moment d'ordre k, par exemple cette méthode a été utilisée par Sarnak [Sa] pour les fonctions L de convolutions de Rankin-Selberg:

$$|L(f \otimes g, 1/2)| \ll_{\varepsilon,q} k^{1-1/28+\varepsilon}$$

pour g une forme primitive fixée et $f \in S_k^p(q)$ une forme primitive de poids k.

- Une deuxième possibilité est d'obtenir une bonne majoration pour le moment d'ordre $k+2$ si k est pair (ou éventuellement $k+1$ si l'on sait que les $L(f,1/2)$ sont tous positifs ou nuls, c'est cette dernière approche qui a été utilisée avec succès par Conrey et Iwaniec dans [CI1]).

- Une troisième possibilité est la méthode d'*amplification* inventée par Iwaniec et developpée avec Duke et Friedlander [DFI1, DFI2, DFI4]. Cette dernière méthode est en quelque sorte un cas intermédiaire de la deuxième; elle consiste à obtenir pour le moment partiel (27) ("d'ordre" $k+2\Delta$) une majoration de la forme

$$M_k(\mathcal{F}_Q, \mathbf{x}, 1/2) \ll_\varepsilon Q^\varepsilon \sum_{l\leq L} |x_l|^2, \tag{36}$$

pour tout $\varepsilon > 0$, puis à choisir les coefficients $(x_l)_{l\leq L}$ des polynômes $M(f, 1/2)$ de sorte que la contribution d'un $f_0 \in \mathcal{F}_Q$ donné soit *amplifiée* (ainsi on appellera $M(f_0, 1/2)$ un *amplificateur*) : on demande que l'on ait

$$|M(f_0, 1/2)| \gg L^{\delta-\varepsilon} \text{ et } \sum_{l\leq L} |x_l|^2 \ll_\varepsilon L^{\delta+\varepsilon} \tag{37}$$

pour un certain $\delta > 0$ et tout $\varepsilon > 0$. On déduit de (36) et de (37) la majoration

$$|L(f_0, 1/2)| \ll_\varepsilon Q^{\kappa/k+\varepsilon} L^{-\delta/k} \ll_{eps} Q^{1/4+\varepsilon} L^{-\delta/k},$$

qui suffit à obtenir quasi-HLG pour f_0 dès que $\log L \gg \log Q_f$. Ainsi, pour $f_0 = \chi_0$ un caractère de Dirichlet on choisit $x_l = \overline{\chi}_0(l)$, on obtient alors (37) avec $\delta = 1$. Pour $f \in S_k(q)$ on choisit l'amplificateur de Iwaniec basé sur l'identité $\lambda_f(p)^2 - \lambda_f(p^2) = 1$ valable dès que $(p, q) = 1$: on prend $x_{p^2} = -1$ si $p^2 \leq L$, $x_p = \lambda_{f_0}(p)$ si $p^2 \leq L$, et $x_l = 0$ sinon; avec ce choix on obtient (37) pour $\delta = 1/2$.

Cette technique a été utilisée avec succès dans un certain nombre de cas comme par exemple [DFI1, DFI2, DFI4, KMV3]. La principale difficulté pour obtenir (36) réside dans le contrôle de la contribution des termes non-diagonaux (qui apparaissent car $k = 4\kappa$). Par exemple Duke, Friedlander et Iwaniec ont obtenus les majorations [DFI2, DFI4] pour les fonctions L de formes modulaires

$$|L(f, 1/2)| \ll_\varepsilon q^{1/4-1/160+\varepsilon}$$

et pour le cas (beaucoup plus difficile) de ψ un caractère du groupe des classes d'ideaux d'un corps quadratique imaginaire de discriminant $-D$,

$$|L(\psi, 1/2)| \ll_\varepsilon q^{1/4-2^{-18}+\varepsilon}.$$

BIBLIOGRAPHIE

[B] E. Bombieri *A lower bound for the zeros of Riemann's zeta function on the critical line (following N. Levinson).* Séminaire Bourbaki (1974/1975: Exposs Nos. 453-470), Exp. No. 465, pp. 176–182. Lecture Notes in Math., Vol. 514.

[BH] E. Brézin, S. Hikami, *Characteristic polynomials of random matrices.* Comm. Math. Phys. 214 (2000), no. 1, 111–135.

[Br] A. Brumer, *The rank of* $J_0(N)$, Columbia University Number Theory Seminar (New York, 1992), Asterisque No. 228, (1995), 3, 41–68.

[Co] A. Connes,*Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function.* Selecta Math. (N.S.) 5 (1999), no. 1, 29–106.

[CF] J.B. Conrey, D. W. Farmer, *Mean values of L-functions and symmetry,* Internat. Math. Res. Notices 2000, no. 17, 883–908.

[CG] J.B. Conrey, A. Ghosh, *A conjecture for the sixth power moment of the Riemann zeta-function,* Internat. Math. Res. Notices 1998, no. 15, 775–780.

[CI1] B. Conrey, H. Iwaniec, *The cubic moment of central values of automorphic L-functions* Ann. Math, 151 n. 3, 1175-1216 (2000).

[CI2] B. Conrey, H. Iwaniec, *En préparation*.

[CKRS] J.B. Conrey, J. P.Keating, M. Rubinstein , N. C. Snaith, *On the frequency of vanishing of quadratic twists of modular L-functions* . Preprint (2000).

[CS] J.B. Conrey, K. Soundararajan : *en préparation.*

[De1] P. Deligne, *La conjecture de Weil I*, Publ.Math.IHES 43 (1974), 273-308.

[De2] P. Deligne, *La conjecture de Weil II*, Publ.Math.IHES 52 (1981), 313-428.

[Du] W. Duke : *The critical order of vanishing of automorphic L-functions with high level,* Invent. Math. 119, (1995), 165–174.

[DFI1] W. Duke, J. Friedlander, H. Iwaniec, *Bounds for automorphic L-functions.* Invent. Math. 112 (1993), no. 1, 1–8.

[DFI2] W. Duke, J. Friedlander, H. Iwaniec, *Bounds for automorphic L-functions. II,* Invent. Math. 115, (1994).

[DFI3] W. Duke, J. Friedlander, H. Iwaniec, *Class group L-functions.* Duke Math. J. 79 (1995), no. 1, 1–56.

[DFI4] W. Duke, J. Friedlander, H. Iwaniec, *Bounds for automorphic L-functions. III,* nvent. math. 143. 2, 221-248 (2001).

[EMOT] A. Erdeilyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Higher Transcendental functions Vol. I, II, III.* Based, in part, on notes left by Harry Bateman. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1953.

[FI] Fouvry E., Iwaniec H., *Low lying zeros of dihedral L functions*, Ann. Sci. ENS (à paraitre).

[GoJ] Godement R., Jacquet H.,*Zeta functions of simple algebras.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 260 (1972).

[GZ] W. Gross, D. Zagier: Heegner points and derivatives of L-series. Invent. Math. 84 (1986), no. 2, 225–320.

[HB] Heath-Brown D. R. *The fourth power mean of Dirichlet's L-functions*, Analysis 1 (1981), no. 1, 25–32.

[HM] D.R. Heath-Brown, P. Michel, *Exponential decays for the frequency of the analytic rank of Automorphic L-functions,* Duke Math. Journal Duke Math. Journal 102, 3, p. 475-484 (2000).

[He] Helgason S. *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces.* Pure and Applied Mathematics, 80. Academic Press (1978).

[ILS] H. Iwaniec, W. Luo, P. Sarnak, *Low Lying Zeros of families of L-functions*, Publ IHES à paraître.

[IS1] H. Iwaniec, P. Sarnak, *The non-vanishing of central values of automorphic L-functions and Siegel-Landau zeros*, à paraître.

[IS2] H. Iwaniec, P. Sarnak, *Perspectives in the Analytic Theory of L functions*, Preprint (2000).

[JS] H. Jacquet, J. A. Shalika,*On Euler products and the classification of automorphic representations. I,* Amer. J. Math. 103 (1981), no. 3, 499–558.

[JPPS] H. Jacquet, I.I. Piatetskii-Shapiro, J. A. Shalika, *Rankin–Selberg convolutions,* Amer. J. Math. 105 (1983), no. 2, 367–464.

[Ka] N. M. Katz, *Gauss Sums, Kloosterman Sums and Monodromy Groups,* Annals of Maths. Studies 116, PUP.

[KSa] N. M. Katz, P. Sarnak, *Random matrices, Frobenius eigenvalues, and monodromy.* American Math. Soc. Colloquium Publications, 45. (1999).

[KSn1] J. P. Keating, N. C. Snaith, *Random matrix theory and L-functions at $s = 1/2$.* Comm. Math. Phys. 214 (2000), no. 1, 91–110.

[KSn2] J. P. Keating, N. C. Snaith, *Random matrix theory and $\zeta(1/2+it)$.* Comm. Math. Phys. 214 (2000), no. 1, 57–89.

[KM1] Kowalski E., Michel P., *The analytic rank of $J_0(q)$ and zeros of automorphic L-functions*, Duke Math. Journal, 100, p. 503-547.

[KMV1] E. Kowalski, P. Michel, J. VanderKam, *Non-vanishing of high derivatives of automorphic L-functions at the center of the critical strip*, Journ. Reine Angew. Math. 526, p. 1-34 (2000).

[KMV2] E. Kowalski, P. Michel, J. VanderKam, *Mollification of the fourth moment of automorphic L-functions and arithmetic applications*, Inventiones Mathematicae, 142, 1, p.95-151 (2000).

[KMV3] E. Kowalski, P. Michel, J. VanderKam, *Rankin-Selberg L functions in the level aspect*, Preprint 2000.

[Me] M. L. Mehta,*Random matrices.* Second edition. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1991.

[MV] P. Michel, J. VanderKam, *Simultaneous non-vanishing of twists of automorphic L-functions.* Preprint 2001.

[Mo] H. L. Montgomery, *The pair correlation of zeros of the zeta function.* Analytic number theory (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXIV), p. 181–193 (1972).

[Mu] R. Murty, *The analytic rank of $J_0(N)(Q)$*, Number theory (Halifax, NS, 1994), 263–277, CMS Conf. Proc., 15, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.

[Od] A.M. Odlyzko, *The 10^{20th} zero of the Riemann zeta function and 70 millions of its neighbors*, Preprint ATT 1989.

[OS] A. Ozluk, C. Snider, *Small zeros of quadratic L functions*, Bull. Aust. Math. Soc. 47, 307-319 (1993).

[P] A. Peng, *PHD Thesis, Rutgers*, en préparation.

[Ro] E. Royer,*Petits zéros de fonctions L de formes modulaires*, Acta Arith. (à paraitre).

[Ru] M. Rubinstein, *Evidence for a spectral interpretation of the zéros of L-functions*, Phd Thesis, Princeton University, 1998.

[RS] Z. Rudnick, P. Sarnak, *Zeros of principal L-functions and random matrix theory,* A celebration of John F. Nash, Jr. Duke Math. J. 81 (1996), no. 2, 269–322.

[Sa] P. Sarnak. *Estimates for Rankin-Selberg L-functions and quantum unique ergodicity.* (in preparation).

[Se] A. Selberg : *Contributions to the theory of Dirichlet's L functions*, Skr. utg. av Det Norske Videnskaps-Akademi, Mat. Nat. Kl. (1946) No 3, 1–62.

[So] K. Soundararajan, *Non-vanishing of quadratic Dirichlet L-functions at* $s = 1/2$, Ann. of Math. Vol 152, No. 2, 447-488.

[Ti] E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function.* Second edition. Edited and with a preface by D. R. Heath-Brown. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986.

[Va] J. VanderKam, *Non-vanishing of Hilbert modular L-functions at the center of the critical strip*, Preprint (1998).

[Wa] J. L. Waldspurger, *Sur les coefficients de Fourier des formes modulaires de poids demi-entier*, *J. Math. Pures et Appl.* 60 (1981), 375-484.

[Zi] M. Zirnbauer, *Riemannian symmetric superspaces and their origin in random-matrix theory.* J. Math. Phys. 37 (1996), no. 10, 4986–5018.

Philippe MICHEL

Université de Montpellier II

Département de Mathématiques

Case 051

F-34095 Montpellier Cedex

E-mail : `michel@math.univ-montp2.fr`